EINIGE UNTERSUCHUNGEN NICHTASSOZIATIVER ALGEBREN.

MANFRED RICHTER

München

1967

Einige Untersuchungen nichtassoziativer Algebren.

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Ludwig - Maximilians - Universität München

vorgelegt von

Manfred Richter

aus Leipzig

München, 16. Dezember 1966

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Berichterstatter: Prof. Dr. M. Koecher

Prof. Dr. F. Kasch

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Februar 1967

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Inhalt.

Einleitung. 2

Teil A. Tensorprodukte von Algebren.

§ 1. Relationen. 6

§ 2. Einfachheit und Zentralität. 27

§ 3. Linearformen. 31

§ 4. Derivationen. 33

Teil B. Schwach nichtausgeartete, kommutative, potenz-assoziative Algebren.

I. Der Fall Charakteristik ungleich 2.

§ 5. Wichtige Identitäten. 43

§ 6. Peirce-Zerlegung. 46

§ 7. Definition der Regularität; einfache Eigenschaften. 53

§ 8. Die Algebren ^{ij} und ^{ij}; Isomorphiesätze. 58

§ 9. Einfache Algebren. 65

II. Der Fall Charakteristik 2.

§10. Zwei Strukturssätze. 72

§11. Zentral-einfache Jordan-Algebren. 76

§12. (B)-Algebren. 86

Literaturverzeichnis. 94

Einleitung.

Aus der Theorie der assoziativen Algebren ist wohlbekannt, daß man zu zwei solchen Algebren in natürlicher Weise ihr Tensorprodukt erklären kann, indem man das Tensorprodukt der ihnen zugrundeliegenden Vektorräume mit einer geeigneten assoziativen Struktur versieht. Es liegt nun nahe, diese Bildung genauer zu untersuchen und dabei gerade den nichtassoziativen Fall einzubeziehen. Dem Studium der dabei auftretenden Phänomene ist Teil A dieser Arbeit gewidmet.

In §1 zeigen wir dabei, daß die Bildung des Tensorprodukts auf die assoziativen Algebren zugeschnitten ist, da sich nämlich außer der Kommutativität sonst keine Relation auf ein solches Produkt überträgt. (Auf gewisse Ausnahmefälle kommen wir noch zu sprechen.) Trotzdem lassen sich die Fragen nach Einfachheit, Nukleus, Zentrum, Linearformen und Derivationen auf diesem Tensorprodukt auch im allgemeinen Fall behandeln. Die Ergebnisse stellen wir in den §§2-4 zusammen.

Einer der oben erwähnten Ausnahmefälle ist es, daß die Klasse der Jordan-Algebren über einem Körper der Charakteristik 2 unter Tensorierung abgeschlossen ist. Das führt auf die Untersuchung dieser Algebren, die in §10 vorbereitet und in §11 wenigstens für den wichtigen zentral-einfachen Fall zu Ende gebracht wird. Die dabei angegebene Charakterisierung erweist sich jedoch als für die Praxis nicht gut geeignet; eine andere Beschreibung benötigt die eigens dafür definierten sog. (B)-Algebren, über die wir in §12

einige Ergebnisse zusammenstellen. An dieser Stelle bleiben noch viele Fragen offen.

Auf die Jordan-Algebren über Körpern der Charakteristik 2 werden wir auch geführt, wenn wir versuchen, folgenden bekannten Satz (vgl. etwa [4]) zu verschärfen:

> Jede schwach nichtausgeartete, kommutative, potenzassoziative Algebra über einem Körper einer zu 10 primen Charakteristik mit wenigstens vier Elementen ist eine Jordan-Algebra.

In §10 wird gezeigt, daß dieser Satz auch für Körper der Charakteristik 2 gilt; der größere Abschnitt von Teil B dieser Arbeit beschäftigt sich jedoch mit den Charakteristiken 3 und 5. Nach umfangreichen Vorarbeiten in den §§5-8 folgt die Aussage des Satzes schließlich unter der Zusatzvoraussetzung der Regularität (in bezug auf ein Orthogonalsystem von wenigstens drei Idempotenten), die auch in der Theorie der Jordan-Algebren und deren Klassifikation Bedeutung hat [4].

In der Literatur spielt die Zusatzvoraussetzung der Einfachheit eine große Rolle. Albert [1][2] und Kokoris [5] [6] müssen außerdem noch Stabilität, strikte Potenz-Assoziativität oder den Ausschluß bestimmter Charakteristiken verwenden, um auf die Jordan-Identität schließen zu können. In §9 wird nun für den Fall von Orthogonalsystemen von wenigstens drei Idempotenten gezeigt, daß für schwach nichtausgeartete, kommutative, potenz-assoziative Algebren die Einfachheit ausreicht, um sie als Jordan-Algebren zu erkennen.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Hinweise und Ratschläge bin ich Herrn Prof. Dr. M. Koecher zu großem Dank verpflichtet.

A) Tensorprodukte von Algebren.

Im folgenden bezeichnet K stets einen kommutativen Körper. Unter einer Algebra $\mathfrak{A}$ über K verstehen wir einen Vektorraum V über K, in dem eine bilineare Multiplikation gegeben ist. Dabei ist V von § 2 an als endlichdimensional vorausgesetzt, während es für § 1 genügt, die auftretenden Algebren als abzählbar erzeugt anzunehmen. Im übrigen verwenden wir, ohne im einzelnen besonders darauf hinzuweisen, die Bezeichnungen, Begriffe und Sätze aus Kapitel I der "Jordan-Algebren" von Braun-Koecher [4].

Unter dem Tensorprodukt $\mathfrak{A} \otimes_K \mathfrak{B}$ zweier Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ über K verstehen wir den Vektorraum $\mathfrak{A} \otimes_K \mathfrak{B}$, ausgestattet mit der durch $(a \otimes b)\cdot(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ gegebenen Multiplikation. Über die Zulässigkeit dieser Definition und die wichtigsten Eigenschaften des Tensorprodukts vgl. bei Bourbaki [8].

Bei allen Algebren außer den in den §§12 und 13 auftretenden (B)-Algebren wollen wir die Existenz eines Einselementes voraussetzen.

§1. Relationen.

Wir interessieren uns in diesem Paragraphen für die Frage, ob Relationen, die in zwei Algebren gelten, auch in deren Tensorprodukt Gültigkeit haben. Es wird sich zeigen, daß dies im wesentlichen nur für Kommutativität und Assoziativität zutrifft. Voran stellen wir einige Betrachtungen über Vektorräume, die wir später benötigen.

1. In einem Vektorraum V mit gegebener Basis $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir als die $\mathfrak{B}$-Länge eines Elementes $a \in V$ die Anzahl der von 0 verschiedenen Koeffizienten in der Basisdarstellung von a.

Lemma (1.1): V sei ein Vektorraum über K mit Basis $\mathfrak{B} = \{b_\mu , \mu \in M\}$, $W \subset V$ ein Untervektorraum mit einer Basis $\mathfrak{C}$ aus Elementen einer $\mathfrak{B}$-Länge $\leqslant 2$.

(1) Zu $b_{\mu_1} + \alpha b_{\mu_2} \in \mathfrak{C}$ gibt es eine Basis $\mathfrak{C}'$ von W mit (a) $b_{\mu_1} + \alpha b_{\mu_2} \in \mathfrak{C}'$;

(b) die $\mathfrak{B}$-Länge aller Elemente von $\mathfrak{C}'$ ist höchstens 2;

(c) in der $\mathfrak{B}$-Darstellung eines jeden von $b_{\mu_1} + \alpha b_{\mu_2}$ verschiedenen Elementes von $\mathfrak{C}'$ kommt b_{μ_1} nicht vor;

(2) Ist $\sum_{\varrho \neq} \alpha_\varrho b_{\mu_\varrho} \in W$, $\alpha_\varrho \neq 0$, so gibt es ein $\tilde{\varrho}$ und ein $\beta \in K$, so daß $b_{\mu_{\tilde{\varrho}}} + \beta b_{\mu_{\tilde{\varrho}}} \in W$.

Beweis: (1) Ist in der ursprünglichen W-Basis etwa $\beta b_{\mu_1} + \gamma b_{\mu_3}$, $\beta \neq 0$ Basiselement, so können wir es durch $-\alpha\beta b_{\mu_2} + \gamma b_{\mu_3}$ ersetzen.

(2) Nach Voraussetzung können wir schreiben

$\sum_{\varsigma \geq 1} \alpha_\varsigma b_{\mu_\varsigma} = \sum_\sigma \beta_\sigma (c_\sigma + \gamma_\sigma c'_\sigma)$

mit $c_\sigma , c'_\sigma \in \mathfrak{L}$, $\beta_\sigma \neq 0$. Der auf der linken Seite auftretende Vektor b_{μ_1} muß auch auf der rechten Seite mit von 0 verschiedenem Faktor auftreten, o.E.d.A. gilt also $b_{\mu_1} = c_1$. Ist nun $\gamma_1 = 0$, so ist $b_{\mu_1} \in W$ ($\beta = 0$ in der Behauptung); im Falle $\gamma_1 \neq 0$ können wir nach (1) annehmen, daß c'_1 in keinem weiteren Summanden rechts auftritt. Dann muß c'_1 auf der linken Seite vorkommen, es gibt also ein $\tilde{\varsigma}$ mit $c'_1 = b_{\mu_{\tilde{\varsigma}}}$. Damit ist aber $\alpha_1 b_{\mu_1} + \alpha_1 \gamma_1 b_{\mu_{\tilde{\varsigma}}} \in W$, q.e.d.

Lemma (1.2): V sei ein Vektorraum über K mit der Basis $\mathfrak{L} = \{b_{\mu\nu} , \mu \in M, \nu \in N\}$, $W \subset V$ ein Untervektorraum mit einer Basis aus Elementen einer $\mathfrak{L}$-Länge ≤ 2 und mit der Eigenschaft, daß $0 \neq \beta b_{\mu\nu} - \beta' b_{\mu'\nu'} \in W$ höchstens für $\mu = \mu'$ gilt. Dann ist für jedes Element $\sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} b_{\mu\nu} \in W$, $\alpha_{\mu\nu} \neq 0$, und jedes $\mu \in M$ bereits $\sum_\nu \alpha_{\mu\nu} b_{\mu\nu} \in W$.

Beweis: Nach Lemma (1.1.2) gibt es ein $\mu_2 \in M$ und ein $\nu_2 \in N$, so daß $\alpha_{\mu_1\nu_1} b_{\mu_1\nu_1} + \beta b_{\mu_2\nu_2} \in W$ für geeignetes $\beta \in K$. Nach Voraussetzung ist das für $\beta \neq 0$ höchstens im Fall $\mu_2 = \mu_1$ möglich; wir können dann schreiben

$\sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} b_{\mu\nu} = (\alpha_{\mu_1\nu_1} b_{\mu_1\nu_1} + \beta b_{\mu_1\nu_2}) + \sum_{(\mu,\nu) \neq (\mu_1,\nu_1)} \alpha'_{\mu\nu} b_{\mu\nu}$

mit $\alpha'_{\mu_1\nu_2} = \alpha_{\mu_1\nu_2} - \beta$ und $\alpha'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}$ für $(\mu,\nu) \neq (\mu_1,\nu_2)$. Jedenfalls hat also - da sich dasselbe Verfahren auf die stehengebliebene Summe anwenden läßt - $\sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} b_{\mu\nu}$ eine Darstellung

$$\sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} b_{\mu\nu} = \sum_{\mu} \Big(\sum_{\varrho,\sigma} \big(\beta_{\varrho} b_{\mu\varrho} + \beta_{\sigma} b_{\mu\sigma} \big) \Big)$$

mit $\beta_{\varrho} b_{\mu\varrho} + \beta_{\sigma} b_{\mu\sigma} \in W$. Da die $b_{\mu\nu}$ eine Basis von V bilden, ist $\sum_{\varrho,\sigma} (\beta_{\varrho} b_{\mu\varrho} + \beta_{\sigma} b_{\mu\sigma}) = \sum_{\nu} \alpha_{\mu\nu} b_{\mu\nu}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

2. In unserer Darstellung der freien Algebren folgen wir nun Jacobson [9], bemerken aber, daß ein Aufbau aus "Worten" wie bei Braun-Koecher [4] ebenso möglich ist.

Ist $X \neq \emptyset$ eine (endliche oder) abzählbare Menge, so verstehen wir unter der Halbgruppe HG(X) die Menge

$\{(k,f): k \in \mathbb{N},\ f:\{1,\ldots,k\} \to X$ mit der Verknüpfung

$(k,f)\cdot(l,g) = (k+l,h)$ mit $h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{für } 1 \leqslant i \leqslant k \\ g(i-k) & \text{für } k+1 \leqslant i \leqslant k+l \end{cases}$

Nach einem Satz von Jacobson [9] ist jede Abbildung $r: X \to H$ von X in eine Halbgruppe H auf ganz HG(X) eindeutig als Homomorphismus fortsetzbar. Für $Y \subset X$ verstehen wir unter dem Y-Grad von (k,f) die Anzahl der $f(\kappa) \in Y$, $1 \leqslant \kappa \leqslant k$.

Diese Halbgruppe HG(X) ist gerade die Menge der assoziativen Worte in Unbestimmten aus X. Um eine Klammerung einzuführen, verwenden wir ein Element $p \notin X$ (das an der Stelle der sich schließenden Klammer stehen soll) und definieren in $HG(X \cup \{p\})$ eine Verknüpfung "$*$" vermöge $x*y := xyp$. Die kleinste unter der Verknüpfung "$*$" abgeschlossene Untermenge von $HG(X \cup \{p\})$, die X umfaßt, bezeichnen wir nach Adjunktion eines Einselements als Monade M(X) über X. Sie entspricht der Menge der nichtassoziativen Worte in Unbestimmten aus X einschließlich des leeren Wortes. Analog wie oben ist jede Abbildung von X in ein Gruppoid G, d.h. in eine nichtassoziative "Halbgruppe", mit

Einselement auf ganz M(X) eindeutig als Homomorphismus fortsetzbar.

Für jedes solche Gruppoid G und jeden Körper K bildet der Vektorraum K_G über K mit Basis G durch die Verknüpfung

$$(\sum_i \alpha_i g_i)(\sum_j \beta_j h_j) =: \sum_{ij} \alpha_i \beta_j (g_i h_j)$$

eine (nichtassoziative) Algebra über K. $K_{M(X)} =: F(X)$ nennen wir die freie nichtassoziative Algebra über K mit Erzeugendensystem X; für die multiplikative Verknüpfung schreiben wir wieder kurz "xy" statt "x∗y". Jede Abbildung von X in eine Algebra $\mathfrak{A}$ ist eindeutig auf ganz F(X) als Homomorphismus fortsetzbar.

Es sei $R \in F(X)$. Wir sagen, die Algebra $\mathfrak{A}$ über K erfüllt die Relation R, wenn $\delta(R) = 0$ für alle Homomorphismen $\delta: F(X) \to \mathfrak{A}$ gilt. Wegen der eben erwähnten Universalität ist diese Bedingung gleichwertig mit $\delta(R) = 0$ für alle Abbildungen $\delta: X \to \mathfrak{A}$, d.h. für alle Einsetzungen von Elementen aus $\mathfrak{A}$ für die Unbestimmten aus X.- Für eine Menge $\mathcal{R} \subset F(X)$ betrachten wir

$$T(\mathcal{R},X) := \{\delta(R): R \in \mathcal{R},\ \delta: F(X) \to F(X) \text{ Homomorphismus}\}$$

und das von dieser Menge erzeugte Ideal $\langle T(\mathcal{R},X)\rangle \subset F(X)$. Den kanonischen Epimorphismus von F(X) nach $F(X)/\langle T(\mathcal{R},X)\rangle$ bezeichnen wir mit $\nu_{\mathcal{R}}$; dann gilt:[1)]

Satz (1.3): Die Algebra $F_{\mathcal{R}}(X) = F(X)/\langle T(\mathcal{R},X)\rangle$ erfüllt die Relationen $R \in \mathcal{R}$. Umgekehrt ist jede abzählbar erzeugte Algebra $\mathfrak{A}$, die diese Relationen erfüllt, epi-

---

[1)] Statt $F_{\{R\}}(X)$ schreiben wir auch kurz: $F_R(X)$.

morphes Bild von $F_{\mathcal{R}}(X)$; es gibt genau einen solchen Epimorphismus $\bar{\gamma}$, so daß $\bar{\gamma} \circ \nu_{\mathcal{R}}$ die Fortsetzung einer gegebenen Abbildung $\gamma: X \to \mathfrak{A}$ ist.

Zum Beweis verweisen wir wieder auf Jacobson [9].- $F_{\mathcal{R}}(X)$ heißt freie $\mathcal{R}$-Algebra über K mit Erzeugendensystem X.

Korollar 1: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(E 1) $\mathfrak{A}$ erfüllt alle Relationen $R \in \mathcal{R}$.

(E 2) $\mathfrak{A}$ ist epimorphes Bild von $F_{\mathcal{R}}(X)$.

Ist nämlich $\gamma: F_{\mathcal{R}}(X) \to \mathfrak{A}$ ein Epimorphismus, $\delta: F(X) \to \mathfrak{A}$ ein Homomorphismus, so wählen wir zu jedem $x \in X$ ein Element aus $\gamma^{-1}(\delta(x))$ und erhalten so eine Abbildung von X in $F_{\mathcal{R}}(X)$, die wir zu einem Homomorphismus $\beta: F(X) \to F_{\mathcal{R}}(X)$ fortsetzen können. Für $R \in \mathcal{R}$ ist dann $\delta(R) = (\gamma \circ \beta)(R) = 0$, da $F_{\mathcal{R}}(X)$ R erfüllt. $\mathfrak{A}$ erfüllt also die Relation R.

Für Mengen $\mathcal{R}, \mathcal{T} \subset F(X)$ sagen wir, $\mathcal{R}$ impliziert $\mathcal{T}$, wenn $F_{\mathcal{R}}(X)$ epimorphes Bild von $F_{\mathcal{T}}(X)$ ist.

Korollar 2: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(I 1) $\mathcal{R}$ impliziert $\mathcal{T}$.

(I 2) $F_{\mathcal{R}}(X)$ ist epimorphes Bild von $F_{\mathcal{T}}(X)$.

(I 3) $F_{\mathcal{R}}(X)$ erfüllt alle Relationen $S \in \mathcal{T}$.

(I 4) $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ke}\,\delta$ für alle Homomorphismen $\delta: F(X) \to F_{\mathcal{R}}(X)$.

(I 5) Wenn $\mathfrak{A}$ alle Relationen $R \in \mathcal{R}$ erfüllt, so erfüllt $\mathfrak{A}$ auch alle Relationen $S \in \mathcal{T}$.

(I 6) $\nu_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) = 0$.

(I 1) und (I 2) bzw. (I 3) und (I 4) sind dabei nach Definition gleichwertig; die Äquivalenz von (I 2) und (I 3) folgt aus der von (E 1) und (E 2); (I 5) folgt aus (E 1),

(E 2) und (I 2), während nach dem Satz sicher $\mathfrak{A} = F_{\mathcal{R}}(X)$ die Relationen $\mathcal{R}$ erfüllt, so daß durch die Spezialisierung $\mathfrak{A} = F_{\mathcal{R}}(X)$ aus (I 5) wiederum (I 2) folgt. (I 6) folgt aus (I 4), indem wir $\delta = \nu_{\mathcal{R}}$ setzen; umgekehrt ist für jedes $\delta : F(X) \to F_{\mathcal{R}}(X)$ sicher $\delta(T(\mathcal{R},X)) = \{0\}$ und damit auch $\delta(\mathrm{Ke}\ \nu_{\mathcal{R}}) = \delta(\langle T(\mathcal{R},X)\rangle) = \{0\}$, da nach (I 6) $\mathcal{T} \subset \mathrm{Ke}\ \nu_{\mathcal{R}}$, folgt $\delta(\mathcal{T}) = \{0\}$ und damit (I 4).

Wenn jede Algebra $\mathfrak{A}$ die Relationen $R \in \mathcal{R}$ genau dann erfüllt, wenn $\mathfrak{A}$ die Relationen $S \in \mathcal{T}$ erfüllt, so implizieren sich $\mathcal{R}$ und $\mathcal{T}$ gegenseitig; wir nennen solche Mengen äquivalent.

Lemma (1.4): Wird $\mathcal{T}$ durch $\mathcal{R}$ und $\mathcal{T}'$ durch $\mathcal{R}'$ impliziert, so auch $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ durch $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$.

Beweis: Da $F_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'}(X)$ trivialerweise $\mathcal{R}$ erfüllt, ist es epimorphes Bild von $F_{\mathcal{R}}(X)$, also nach Voraussetzung auch von $F_{\mathcal{T}}(X)$ und (analog) von $F_{\mathcal{T}'}(X)$. $F_{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'}(X)$ erfüllt also die Relationen aus $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$, d.h. die Relationen aus $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ und ist demnach epimorphes Bild von $F_{\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'}(X)$, woraus die Behauptung folgt.

3. Ein Element $R \in F(X)$ heißt homogen in x vom Grade g, wenn R Linearkombination von Elementen aus M(X) ist, die alle den $\{x\}$-Grad g besitzen; ist R homogen in allen $x \in X$, so heißt es homogen. Im folgenden interessieren wir uns ausschließlich für homogene Elemente und die dadurch erzeugten Relationen. Ist R homogen vom Grade 0 oder 1 in allen $x \in X$, so heißt es linear.

Eine viel verwendete Methode zur Linearisierung von

Relationen ist das sog. Polarisieren. Dazu benötigen wir die Voraussetzung, daß der zugrundeliegende Körper K unendlich ist; im folgenden soll das stets angenommen sein. Wir definieren den Homomorphismus G_P^y: $F(X) \to F(X)$, $y \in X$, $P \in F(X)$ durch $G_P^y \big| X \setminus \{y\} = Id$, $G_P^y y = P$. Für $G^x_{x+\tau y} R$, $x,y \in X$, $\tau \in K$ schreiben wir

$$G^x_{x+\tau y} R = R + \tau D^y_x R + \tau^2(\ldots)$$

und verwenden diese Gleichung zur Definition der Abbildung D^y_x: $F(X) \to F(X)$. Falls $D^y_x R \neq 0$, so ist $D^y_x R$ in allen $z \in X$, $z \neq x$, $z \neq y$ homogen von demselben Grade wie R, in x homogen von einem um 1 geringeren Grade als R und in y homogen von einem um 1 höheren Grade als R, wie die Definition unmittelbar zeigt. Insbesondere verwenden wir solche y, in denen R homogen vom nullten Grade ist, um eine Linearisierung zu erreichen.

Durch elementare Rechnung folgt:

Lemma (1.5): Für homogene Elemente $R,S \in F(X)$ gilt:

(1) $D^y_x(\alpha R + \beta S) = \alpha D^y_x R + \beta D^y_x S; \quad \alpha, \beta \in K$

(2) $D^y_x(RS) = R\left[D^y_x S\right] + \left[D^y_x R\right] S$

Den Zusammenhang zwischen R und $D^y_x R$ zeigt das

Lemma (1.6): R impliziert jedes $D^y_x R$.

Beweis: Es sei δ: $F(X) \to F_R(X)$ ein Homomorphismus. Dann ist $\delta(R) = \delta \circ G^x_{x+\tau y}(R) = 0$ nach Definition von $F_R(X)$ und damit auch $\tau . \delta D^y_x R + \tau^2 \delta(\ldots) = 0$. Bei unendlichem Körper müssen alle Koeffizienten einzeln verschwinden, wenn ein Polynom 0 ist; also ist $\delta D^y_x R = 0$. $F_R(X)$ erfüllt also

$D_x^y R$, woraus die Behauptung folgt.

Lemma (1.7): (1) R sei in x homogen vom Grade g. Dann ist

$$G_x^y D_x^y R = g \cdot G_x^y R.$$

(2) Ist das homogene $R = m$ sogar ein Element von $M(X)$, so hat $D_x^y R = D_x^y m$ eine Darstellung $D_x^y m = \sum_{\lambda=1}^{g} m_\lambda$ mit $m_\lambda \in M(X)$ und - falls $D_x^y m \neq 0$ - $G_x^y m_\lambda = G_x^y m$ für alle λ.

(3) Für verschiedene, in y vom nullten Grad homogene $m \in M(X)$ sind die m_λ paarweise verschieden.

Beweis: (1) Es ist $G_x^y G_{x+\tau y}^x R = G_x^y R + \tau G_x^y D_x^y R + \tau^2 G_x^y(\ldots)$; andererseits ist $G_x^y G_{x+\tau y}^x = G_x^y G_{(1+\tau)x}^y$, wie man durch Anwendung auf die Elemente von X sieht, und damit

$$G_x^y G_{x+\tau y}^x R = G_x^y (1+\tau)^g R = G_x^y R + g \cdot \tau G_x^y R + \tau^2(\ldots)$$

Durch Vergleich der ersten τ-Potenzen ergibt sich die Behauptung.

(2) $G_{x+\tau y}^x m$ ist eine Summe von 2^g Termen aus $M(X)$; den Faktor τ in der ersten Potenz haben davon genau g Terme, die wir mit m_λ, $\lambda = 1,\ldots,g$ bezeichnen. Also ist $D_x^y m = \sum_{\lambda=1}^{g} m_\lambda$; die m_λ sind dabei sämtlich verschieden, da die "Faktoren" y aufgrund ihrer Entstehung aus $G_{x+\tau y}^x m$ an verschiedenen Stellen stehen. Die Behauptung über $G_x^y m_\lambda$ beweisen wir durch vollständige Induktion nach dem X-Grad h von m. Für $h = 0$ ist $D_x^y m = 0$, daher nichts zu beweisen, für $h = 1$ ist entweder $m = x$, $D_x^y m = y = m_1$ und damit $G_x^y m_1 = G_x^y y = x = m = G_x^y m$, oder $m \neq x$ und $D_x^y m = 0$, was in unserem Zusammenhang ausscheidet. Sei also $h > 1$ und $m = m'm''$ eine nichttriviale Produktdarstellung von m, so ist nach Lemma (1.5)

$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_1} m_\lambda = D_x^y m = m'(D_x^y m'') + (D_x^y m')m'' = \sum_\kappa m' m''_\kappa + \sum_\lambda m'_\lambda m''$

Da die Summanden auf beiden Seiten der Gleichung Elemente aus $M(X)$ und daher linear unabhängig sind, muß o.E.d.A. $m_{\lambda_0} = m' m''_{\kappa_0}$ und damit $G_x^y m_{\lambda_0} = (G_x^y m')(G_x^y m''_{\kappa_0}) = (G_x^y m')(G_x^y m'') = G_x^y m$ nach Induktionsvoraussetzung sein.

(3) Haben wir schließlich ein $m' \neq m$ mit $D_x^y m' = \sum_{\lambda=1}^{\lambda'_1} m'_\lambda$ und wäre $m_{\lambda_0} = m'_{\lambda'_0}$, so auch $G_x^y m_{\lambda_0} = G_x^y m'_{\lambda'_0}$ und damit $m = G_x^y m = G_x^y m' = m'$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir nennen nun $S \in F(X)$ (und entsprechend die daraus entstehende Relation) reduziert bezüglich $\mathcal{R} \subset F(X)$, wenn S minimale $M(X)$-Länge unter den Elementen von $\nu_{\mathcal{R}}^{-1}(\nu_{\mathcal{R}}(R))$ besitzt.

Lemma (1.8): Es sei $S = \sum_\lambda \alpha_\lambda m_\lambda$, $m_\lambda \in M(X)$, $\alpha_\lambda \neq 0$ für alle λ, homogen und reduziert bezüglich einer Menge $\mathcal{R}$ von linearen Elementen der Länge 2 aus $F(X)$; weiter sei D Produkt mehrerer Polarisationsoperatoren: $D = D_{x_1}^{y_1} D_{x_2}^{y_2} \ldots D_{x_n}^{y_n}$. Wird DS durch $\mathcal{R}$ impliziert, so wird jedes Dm_λ durch $\mathcal{R}$ impliziert.

Beweis: Wir betrachten zunächst die in Zusammenhang mit Satz (1.3) erklärte Menge $T(\mathcal{R},X)$. Jeder Homomorphismus $\delta: F(X) \to F(X)$ wird durch eine Abbildung $\delta^*: X \to F(X)$ erzeugt; dabei ist $\delta^* = \delta | X$. Die Menge $E = \{\delta(R): \delta(X) \subset M(X), R \in \mathcal{R}\}$ besteht aufgrund der Voraussetzungen über $\mathcal{R}$ aus Elementen einer Länge ≤ 2. Für ein $R \in \mathcal{R}$ seien $x_1, \ldots, x_p$ diejenigen Elemente aus X, in denen R homogen von positivem Grade ist; wir schreiben dafür auch $R = R(x_1, \ldots, x_p)$. Für beliebiges δ^*, etwa $\delta^*(x_i) = \sum_{\lambda_i} \alpha_i^{(\lambda_i)} n_i^{(\lambda_i)}$, $n_i^{(\lambda_i)} \in M(X)$ ist $\delta(R) = \delta R(x_1, \ldots, x_p) = R(\sum_{\lambda_1} \alpha_1^{(\lambda_1)} n_1^{(\lambda_1)}, \ldots, \sum_{\lambda_p} \alpha_p^{(\lambda_p)} n_p^{(\lambda_p)}) =$

$= \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p} \alpha_1^{(\lambda 1)} \ldots \alpha_p^{(\lambda p)} R(n_1^{(\lambda 1)},\ldots,n_p^{(\lambda p)})$ mit $R(n_1^{(\lambda 1)},\ldots,n_p^{(\lambda p)}) \in E$.

Also ist E ein Erzeugendensystem von $T(\mathcal{R},X)$ als Vektorraum. Wir bilden nun die Menge

$$\hat{E} = E \cup \bigcup_{(k,f) \in HG\{L,R\}} E(k,f)$$

mit $M(X)\cdot E = E(1,f_L)$ - wobei $f_L(1) = L$ -, $E\cdot M(X) = E(1,f_R)$ - wobei $f_R(1) = R$ - und

$$E(k+1,f) = \begin{cases} E(k,f|\{1,\ldots,k\})\cdot M(X) & \text{falls } f(k+1) = R \\ M(X)\cdot E(k,f|\{1,\ldots,k\}) & \text{falls } f(k+1) = L \end{cases}$$

sie besteht ebenso wie E nur aus Elementen einer Länge ≤ 2. Der von $\hat{E}$ erzeugte Vektorraum $[\hat{E}]$ ist aber ein Ideal, er umfaßt den von E erzeugten Vektorraum, also auch $T(\mathcal{R},X)$ und damit $\langle T(\mathcal{R},X)\rangle$. Ke $\nu_{\mathcal{R}} = \langle T(\mathcal{R},X)\rangle$ besitzt also eine Vektorraumbasis aus Elementen einer Länge ≤ 2.

Es sei G der Homomorphismus $G = G_{x_n}^{y_n} \ldots G_{x_1}^{y_1}$. Ke $\nu_{\mathcal{R}}$ ist nach Konstruktion unter Homomorphismen $\delta: F(X) \to F(X)$ invariant; der Homomorphismus $\overline{G}: F_{\mathcal{R}}(X) \to F_{\mathcal{R}}(X)$ ist also durch $\overline{G}(\nu_{\mathcal{R}}(x)) = \nu_{\mathcal{R}}(G(x))$, $x \in X$, wohl definiert.

$\mathcal{R}$ impliziert DS nach Voraussetzung, also ist $DS \subset$ Ke $\nu_{\mathcal{R}}$.

Nach Lemma (1.7.2) gilt dann:

$$\text{Ke } \nu_{\mathcal{R}} \ni DS = D\Big(\sum_\lambda \alpha_\lambda m_\lambda\Big) = \sum_\lambda \alpha_\lambda D m_\lambda = \sum_\lambda \alpha_\lambda \Big(\sum_\kappa m_{\lambda\kappa}\Big),\ m_{\lambda\kappa} \in M(X).$$

Nehmen wir an, es sei $\nu_{\mathcal{R}}(\beta m_{\lambda_0\kappa_0}) = \nu_{\mathcal{R}}(\beta' m_{\lambda_0'\kappa_0'})$ mit $\lambda_0 \neq \lambda_0'$, $\beta' \neq 0$, so folgt

$$0 = \overline{G}\,\nu_{\mathcal{R}}(\beta m_{\lambda_0\kappa_0} - \beta' m_{\lambda_0'\kappa_0'}) =$$

$$= \nu_{\mathcal{R}} G(\beta m_{\lambda_0\kappa_0} - \beta' m_{\lambda_0'\kappa_0'}) = \nu_{\mathcal{R}}(\beta m_{\lambda_0} - \beta' m_{\lambda_0'})$$

Dann können wir S schreiben als

$$S = \sum_\lambda \alpha_\lambda m_\lambda = \sum_{\lambda \neq \lambda_0,\lambda_0'} \alpha_\lambda m_\lambda + \Big(\alpha_{\lambda_0} + \frac{\beta}{\beta'}\alpha_{\lambda_0'}\Big) m_{\lambda_0} - \frac{\alpha_{\lambda_0'}}{\beta'}(\beta m_{\lambda_0} - \beta' m_{\lambda_0'})$$

Da der dritte Summand in Ke $\nu_{\mathcal{R}}$ liegt, bilden die beiden ersten Summanden ein Element aus $\nu_{\mathcal{R}}^{-1}(\nu_{\mathcal{R}}(S))$ mit kürzerer Länge als S im Widerspruch zur Voraussetzung. Also kann $0 \neq \beta m_{\lambda_0 \kappa_0} - \beta' m_{\lambda_0' \kappa_0'} \in \mathrm{Ke}\, \nu_{\mathcal{R}}$ höchstens gelten für $\lambda_0 = \lambda_0'$. ($\beta' = 0$ zieht wegen $m_{\lambda_0 \kappa_0} \notin \mathrm{Ke}\, \nu_{\mathcal{R}}$ $\beta = 0$ nach sich.) Die Anwendung von Lemma (1.2) auf $\sum_{\lambda,\kappa} \alpha_{\lambda\kappa} m_{\lambda\kappa} \in \mathrm{Ke}\, \nu_{\mathcal{R}}$ zeigt nun, daß $\sum_{\kappa} m_{\lambda\kappa} \in \mathrm{Ke}\, \nu_{\mathcal{R}}$ für jedes λ gelten muß. Das bedeutet aber $\nu_{\mathcal{R}}(Dm_{\lambda}) = 0$, woraus die Behauptung folgt.

Aus dem ersten Teil des Beweises erhalten wir leicht das folgende

Korollar: R sei eines der beiden Elemente Kom:= $x_1x_2 - x_2x_1$ und Ass:= $(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$. Dann folgt aus $mS \in \mathrm{Ke}\, \nu_R$, $m \in M(X)$, $S \in F(X)$, daß schon $S \in \mathrm{Ke}\, \nu_R$ gilt.

Beweis: S hat eine Darstellung $S = \sum_{\lambda} \alpha_\lambda m_\lambda$, $\alpha_\lambda \neq 0$, $m_\lambda \in M(X)$. Ke ν_R besitzt eine Basis aus Elementen der M(X)-Länge 2 (Länge 1 kann in diesem Fall nicht auftreten), und wir können mS schreiben als $mS = \sum_{\lambda} \alpha_\lambda (mm_\lambda) \in \mathrm{Ke}\, \nu_R$. Lemma (1.1.2) zeigt, daß dann $mm_1 \in \mathrm{Ke}\, \nu_R$ (was wegen Länge 1 nicht in Frage kommt) oder $\alpha_1(mm_1) + \beta(mm_2) \in \mathrm{Ke}\, \nu_R$ für geeignetes β. Nun ist $m(\alpha_1 m_1 + \beta m_2) \notin E$, da anderenfalls für $n_i \in M(X)$ $m(\alpha_1 m_1 + \beta m_2) = n_1n_2 - n_2n_1$, also z.B. $mm_1 = n_1n_2$, $mm_2 = n_2n_1$, woraus $m_2 = n_1 = m = n_2 = m_1$ folgen würde, während m_1 und m_2 verschieden sind. Also ist bereits $\alpha_1 m_1 + \beta m_2 \in \mathrm{Ke}\, \nu_R$, und es gilt $R = \alpha_1 m_1 + \beta m_2 + \sum_{\lambda>1} \alpha'_\lambda m_\lambda$, wobei wir denselben Schluß auf die Summe wiederholt anwenden können. Die Fortsetzung des Verfahrens liefert die Behauptung.

Lemma (1.9): K sei der F(X) zugrundeliegende Körper, $x \in X$

und $m \in M(X)$ homogen in y vom Grade 0.

(1) Wird $D_x^y m$ durch {Ass} impliziert, so ist $D_x^y m = 0$.

(2) Wird im Falle Char $K \neq 2$ $D_x^y m$ durch {Kom} impliziert, so ist $D_x^y m = 0$.

(3) Wird im Falle Char $K = 2$ $D_x^y m$ durch {Kom} impliziert, so gilt $m \in \mathcal{M}_x$.

Dabei ist $\mathcal{M}_x$ folgendermaßen induktiv definiert: ist m homogen in x vom Grade 0, so ist $m \in \mathcal{M}_x$; für $m', m'' \in \mathcal{M}_x$ ist $m'm'' \in \mathcal{M}_x$; für $\nu_{Kom}(m') = \nu_{Kom}(m'')$ ist $m'm'' \in \mathcal{M}_x$.

Beweis: Zunächst können wir annehmen, daß m in x nicht homogen vom Grade 0 ist, da in diesem Fall $D_x^y m = 0$ und die Behauptung klar ist. Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach dem X-Grad g von m; der Induktionsanfang ist für alle Fälle der gleiche: Für $g = 0$ ist die Behauptung klar, für $g = 1$ ist $D_x^y m = y$ für $m = x$ und $D_x^y m = 0$ sonst; y wird aber weder durch {Kom} noch durch {Ass} impliziert. Sei nun $g > 1$, dann läßt sich m nichttrivial als Produkt $m = m'm''$ schreiben, und es ist nach Lemma (1.5.2)

$$\mathrm{Ke}\,\nu \ni D_x^y m = m'(D_x^y m'') + (D_x^y m')m'' \qquad (1.1)$$

wobei ν in den Fällen (2) und (3) für ν_{Kom}, im Fall (1) für ν_{Ass} steht.

(1) Nach dem ersten Teil des Beweises zu Lemma (1.8) hat $\mathrm{Ke}\,\nu_{Ass}$ eine Basis $\hat{E}$ aus Elementen der Länge 2. Wir definieren eine K-lineare Abbildung $w: F(X) \to K$ durch lineare Fortsetzung von $w: M(X) \to N$, wobei $w(m)$, $m \in M(X)$ die Anzahl der Elemente y in den ersten g' (bzw. in sämtlichen) Faktoren von m bedeute. (g' sei der X-Grad von m'.) Für alle Elemente $R \in E = \{(m_1m_2)m_3 - m_1(m_2m_3) : m_i \in M(X)\}$ ist dann

$w(R) = 0$; dasselbe gilt für alle $\hat{R} \in \hat{E}$, da sich bei Multiplikation der w-Wert der beiden Summanden um denselben Betrag ändert. Also ist $w(S) = 0$ für alle $S \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Ass}$. Nun gilt für jeden Summanden S_1 von $m'(D_x^y m'')$, daß $w(S_1) = 0$; für jeden Summanden S_2 von $(D_x^y m')m''$ aber $w(S_2) = 1$; daher kann eine nichttriviale Linearkombination von einem Summanden von $m'(D_x^y m'')$ und einem von $(D_x^y m')m''$ nicht in $\mathrm{Ke}\ \nu_{Ass}$ liegen. Nach Lemma (1.2) muß also

$$m'(D_x^y m'') \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Ass} \quad \text{und} \quad (D_x^y m')m'' \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Ass}$$

gelten. Das Korollar zum vorhergehenden Lemma zeigt, daß daraus $D_x^y m'' \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Ass}$ und entsprechend $D_x^y m' \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Ass}$ folgt; nach Induktionsvoraussetzung heißt das, daß $D_x^y m'' = D_x^y m' = 0$ und damit auch $D_x^y m = 0$ ist, wie behauptet.

(2) Mit $m'(D_x^y m'') + (D_x^y m')m'' \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Kom}$ gilt auch

$$m'(D_x^y m'') + (D_x^y m')m'' + m''(D_x^y m') - (D_x^y m')m'' =$$

$$= m'(D_x^y m'') + m''(D_x^y m') \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Kom}$$

Es sei $D_x^y m' = \sum_\lambda n'_\lambda$, $D_x^y m'' = \sum_\lambda n''_\lambda$; $n'_\lambda, n''_\lambda \in M(X)$. Nach dem ersten Teil des Beweises zu Lemma (1.8) hat $\mathrm{Ke}\ \nu_{Kom}$ eine Basis aus Elementen der Länge 2; nach Lemma (1.1.2) ist $m'n''_1 \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Kom}$ - was nicht möglich ist, da $\mathrm{Ke}\ \nu_{Kom}$ keine Elemente der Länge 1 enthält - oder $m'n''_1 - \beta m'n''_2 \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Kom}$ oder $m'n''_1 - \beta m''n'_1 \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Kom}$ (für geeignetes $\beta \in K$ und bis auf Numerierung der n'_λ, n''_λ). Da n'_1 ein Summand von $D_x^y m'$ ist, muß aus Gründen des $\{y\}$-Grades $\nu_{Kom}(m') \neq \nu_{Kom}(n'_1)$ sein; die Beziehung $m'n''_1 - \beta m''n'_1 \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Kom}$ zieht also $\nu_{Kom}(m') = \nu_{Kom}(m'')$ nach sich. Dann ist $2m'(D_x^y m') \in \mathrm{Ke}\ \nu_{Kom}$ und - wegen Char $K \neq 2$ und Korollar zu Lemma (1.8) - $D_x^y m' = 0$, woraus die Behauptung folgt. Ist $\nu_{Kom}(m') \neq \nu_{Kom}(m'')$, so

muß $m'(n_1'' - \beta n_2'') \in \mathrm{Ke}\, \nu_{\mathrm{Kom}}$ und damit auch $n_1'' - \beta n_2'' \in \mathrm{Ke}\, \nu_{\mathrm{Kom}}$ gelten. Ebenso wie im Beweis des Korollars folgt nun durch Wiederholung des Verfahrens, daß $D_x^y m'' \in \mathrm{Ke}\, \nu_{\mathrm{Kom}}$ und entsprechend $D_x^y m' \in \mathrm{Ke}\, \nu_{\mathrm{Kom}}$, woraus wir durch Verwendung der Induktionsannahme wiederum die Behauptung erhalten.

(3) Im Fall Char K = 2 können wir bereits aus $\nu_{\mathrm{Kom}}(m') = \nu_{\mathrm{Kom}}(m'')$ die Folgerung $m = m'm'' \in \mathfrak{M}_x$ ziehen, q.e.d.

Korollar: (1) und (2) gelten auch für ein Produkt D mehrerer Polarisationsoperatoren anstelle von D_x^y.

Beweis: Es sei $D = D_{x_1}^{y_1} D_{x_2}^{y_2} \ldots D_{x_n}^{y_n}$. $Dm = D_{x_1}^{y_1}\left[D_{x_2}^{y_2} \ldots D_{x_n}^{y_n} m\right] = D_{x_1}^{y_1}(\sum_\lambda m_\lambda)$ kann als Summe $Dm = D_{x_1}^{y_1}(\sum_{\lambda \in L^*} \alpha_\lambda m_\lambda) + D_{x_1}^{y_1}(\sum_{\lambda \in L^{**}} \beta_\lambda m_\lambda)$ geschrieben werden, wobei $\sum_{\lambda \in L^*} \alpha_\lambda m_\lambda$ reduziert bezüglich Kom bzw. Ass und $\sum_{\lambda \in L^{**}} \beta_\lambda m_\lambda \in \mathrm{Ke}\, \nu$. (Nach Lemma (1.6) ist dann auch $D_{x_1}^{y_1}(\sum_{\lambda \in L^{**}} \beta_\lambda m_\lambda) \in \mathrm{Ke}\, \nu$.) Im ersten Fall ist $L^* \neq \emptyset$, dann ist nach den Lemmata (1.8) und (1.9) $D_{x_1}^{y_1} m_\lambda = 0$ für jedes $\lambda \in L^*$, d.h. m_λ hat den $\{x_1\}$-Grad 0. Dann haben aber auch die m_λ, $\lambda \in L^{**}$ den $\{x_1\}$-Grad 0, und $Dm = D_{x_1}^{y_1}(\sum_\lambda m_\lambda) = 0$ wie behauptet.

Im zweiten Fall ist $L^* = \emptyset$, d.h. $\sum_\lambda m_\lambda = D_{x_2}^{y_2} \ldots D_{x_n}^{y_n} m \in \mathrm{Ke}\, \nu$. Dann läßt sich dasselbe Verfahren nochmals anwenden und so die Behauptung beweisen.

4. Wenn wir - wie auf S.5 angekündigt - nur Relationen R betrachten, die von wenigstens einer Algebra mit Einselement erfüllt werden, so können wir bei den weiteren Überlegungen stets R aus dem Ideal $F'(X) \subset F(X)$ mit

$$F'(X) = \left\{R \in F(X):\ R \text{ homogen},\ R = \sum_\lambda \alpha_\lambda m_\lambda,\ \sum_\lambda \alpha_\lambda = 0\right\}$$

wählen. Wird nämlich R von $\mathfrak{A}$ erfüllt, so ist für den Homomorphismus $\delta\colon F(X) \to \mathfrak{A}$, $\delta(x) = 1$ für alle $x \in X$, $0 = \delta(R) =$

$= \sum_\lambda \alpha_\lambda \delta(m_\lambda) = \sum_\lambda \alpha_\lambda$. Aus der Homogenität von R ist unmittelbar klar, daß F'(X) bei Homomorphismen $\gamma : F(X) \to F(X)$ in sich abgebildet wird. Die Definition von $F_{\mathcal{R}}(X)$ zeigt dann, daß für $\mathcal{R} \subset F'(X)$ gilt: Ke $\nu_{\mathcal{R}} < F'(X)$.

Satz (1.10): Jedes lineare $R \in F'(X)$ der Länge 2 ist äquivalent zu {Kom} oder {Ass} oder {Kom,Ass}.

Beweis: R hat o.E.d.A. die Gestalt $R = m_1 - m_2$, $m_i \in M(X)$, $m_1 \neq m_2$.

1.Fall: Es gibt ein nichtkommutatives $\mathfrak{A}$, das R erfüllt. Dann wählen wir Elemente $u,v \in \mathfrak{A}$ mit $uv \neq vu$ und betrachten den Homomorphismus

$$\delta_{ij}: F(X) \to \mathfrak{A},\ x_i \to u,\ x_j \to v,\ x_k \to 1 \text{ für } k \neq i,j$$

Ist die Reihenfolge von x_i und x_j in m_1 anders als in m_2, so erhalten wir $0 = \delta_{ij}(m_1 - m_2) = uv - vu$ im Widerspruch zur Wahl von u und v. Also stimmt die Reihenfolge der $x_i \in X$ in m_1 und m_2 überein; wir können o.E.d.A. annehmen, daß es die natürliche Reihenfolge ist. Nun sei der X-Grad von m mindestens 3 (da sonst schon alles gezeigt ist). Wir schreiben $m_1 = m_1' m_1''$ und $m_2 = m_2' m_2''$ nichttrivial; der X-Grad von $m_i^{(j)}$ sei $g_i^{(j)}$. Ist $g_1' \neq g_2'$, etwa $g_1' > g_2'$, so betrachten wir den Homomorphismus

$$\delta: F(X) \to \mathfrak{A},\ x_1 \to u,\ x_{g_1'} \to v,\ x_{g_1'+1} \to 1 \text{ für } k \neq 1, g_1', g_1'+1$$

und erhalten $0 = \delta(R) = (uv)w - u(vw)$ und das für alle $u,v,w \in \mathfrak{A}$; d.h. $\mathfrak{A}$ ist assoziativ.- Ist dagegen $g_1' = g_2'$, so ist o.E.d.A. $m_1' \neq m_2'$, und wir wenden dasselbe Verfahren der Produktdarstellung auf diese Elemente an. Wegen der Endlichkeit der möglichen Produktdarstellungen bricht das

Verfahren ab, d.h. im ersten Fall ist $\mathfrak{A}$ assoziativ. Umgekehrt impliziert die Relation der Assoziativität auch R, da in R die Reihenfolge der x_i in m_1 und m_2 übereinstimmt.- 2.Fall: Jedes $\mathfrak{A}$, das R erfüllt, ist kommutativ, d.h. R impliziert Kom. Dann gibt es eine Relation R', so daß $\{R',Kom\}$ und $\{R,Kom\}$ äquivalent sind und in R' m_1 und m_2 mit demselben x (o.E.d.A. x_1) beginnen. (Man erhält R' aus R durch Umordnen der Faktoren in den m_i.) Wir zerlegen wiederum nichttrivial $m_i = m_i' m_i''$ mit X-Graden $g_i^{(j)}$. Gibt es ein $x_{i_0} \in X$ so, daß es in m_1', aber nicht in m_2' als Faktor auftritt, so sei x_{i_1} Faktor in m_1'', und wir betrachten den Homomorphismus

$$\varepsilon : F(X) \to \mathfrak{A},\ x_1 \to u,\ x_{i_0} \to v,\ x_{i_1} \to w,\ x_k \to 1 \text{ für } k \neq 1, i_0, i_1$$

Damit erhalten wir $0 = \varepsilon(R') = (uv)w - (uw)v$ oder

$0 = \varepsilon(R') = (uv)w - u(vw)$ oder

$0 = \varepsilon(R') = (uv)w - u(wv)$. In jedem Fall folgt die Assoziativität von $\mathfrak{A}$, d.h. R impliziert Kom und Ass, ist also zu $\{Kom,Ass\}$ äquivalent.- Zu betrachten sind nur noch Relationen, die Zerlegungen mit $g_1' = g_2'$ liefern, wobei die in m_1' auftretenden Faktoren mit den in m_2' auftretenden Faktoren identisch sind, ebenso für m_1'' und m_2'' (wo wir wieder nach gleichem Anfang ordnen können). Bis auf den Fall, daß die Produktzerlegungen immer im obigen Sinn gleich sind, erhalten wir die Behauptung; in diesem Fall aber wird R durch Kom impliziert, woraus ebenfalls die Behauptung folgt.

5. Nach diesen Vorbereitungen können wir unsere Fragestellung nach denjenigen Relationen, die mit zwei gegebe-

nen Algebren jeweils auch von deren Tensorprodukt erfüllt werden, präzisieren. Wir nennen eine Menge $\mathcal{R} \subset F'(X)$ vererbbar, wenn die Algebra $F_{\mathcal{R}}(X) \otimes F_{\mathcal{R}}(X)$ die Relationen aus $\mathcal{R}$ erfüllt, d.h. $F_{\mathcal{R}}(X) \otimes F_{\mathcal{R}}(X)$ ist (wegen Satz (1.3)) epimorphes Bild von $F_{\mathcal{R}}(X)$.- Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Algebren, die die Relationen aus der vererbbaren Menge $\mathcal{R}$ erfüllen. Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ epimorphe Bilder von $F_{\mathcal{R}}(X)$, die Epimorphismen seien $\mu_{\mathfrak{A}}$ bzw. $\mu_{\mathfrak{B}}$. Dann ist der Homomorphismus $\mu_{\mathfrak{A}} \otimes \mu_{\mathfrak{B}} : F_{\mathcal{R}}(X) \otimes F_{\mathcal{R}}(X) \to \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, der durch lineare Fortsetzung von $(\mu_{\mathfrak{A}} \otimes \mu_{\mathfrak{B}})(R \otimes S) = \mu_{\mathfrak{A}}(R) \otimes \mu_{\mathfrak{B}}(S)$ erklärt ist, ein Epimorphismus; d.h. $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ist epimorphes Bild von $F_{\mathcal{R}}(X) \otimes F_{\mathcal{R}}(X)$, dies wiederum ist wegen der Vererbbarkeit epimorphes Bild von $F_{\mathcal{R}}(X)$, und damit erfüllt $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ die Relationen aus $\mathcal{R}$. Hat umgekehrt die Menge $\mathcal{R}$ die Eigenschaft, daß mit je zwei Algebren auch ihr Tensorprodukt die Relationen aus $\mathcal{R}$ erfüllt, so muß auch $F_{\mathcal{R}}(X) \otimes F_{\mathcal{R}}(X)$ die Relationen aus $\mathcal{R}$ erfüllen. Zusammenfassend sehen wir, daß unsere obige Fragestellung genau die nach den vererbbaren Teilmengen von $F'(X)$ ist.

Der folgende Satz gibt die wichtigste Eigenschaft der vererbbaren Mengen an:

Satz (1.11): Ist $\mathcal{R} \cup \{R\}$ vererbbar, so gibt es Elemente $R_1, \ldots, R_m \in F'(X)$ der Länge 2, so daß $\mathcal{R} \cup \{R\}$ und $\mathcal{R} \cup \{R_1, \ldots, R_m\}$ äquivalent sind. Ist R linear, so sind es auch die $R_1, \ldots, R_m$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\varphi(R) = 0$ für alle Homomorphismen $\varphi : F(X) \to F_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X) \otimes F_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X)$. Es sei $R = \sum_{\lambda} \alpha_\lambda m_\lambda$, $\alpha_\lambda \neq 0$ für alle λ. Sind $\varphi', \varphi'' : F(X) \to F_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X)$ belie-

bige Homomorphismen, so können wir durch lineare Fortsetzung der Abbildung $m \to \gamma'(m) \otimes \gamma''(m)$, $m \in M(X)$ den Homomorphismus $\gamma' \otimes \gamma''$: $F(X) \to F_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X) \otimes F_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X)$ bilden. Nach Voraussetzung ist dann $(\gamma' \otimes \gamma'')(R) = 0$ und damit

$$0 = \sum_{\lambda} \alpha_\lambda (\gamma' \otimes \gamma'')(m_\lambda) =$$

$$= \sum_{\lambda > 1} \alpha_\lambda \gamma'(m_\lambda) \otimes \gamma''(m_\lambda) + \alpha_1 \gamma'(m_1) \otimes \gamma''(m_1)$$

Da $\gamma''(R) = 0$, ist

$$\alpha_1 \gamma''(m_1) = - \sum_{\lambda > 1} \alpha_\lambda \gamma''(m_\lambda) \qquad (1.2)$$

und damit

$$\sum_{\lambda > 1} (\alpha_\lambda \{ \gamma'(m_\lambda) - \gamma'(m_1) \} \otimes \gamma''(m_\lambda)) = 0 \qquad (1.3)$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(1) Für alle Homomorphismen γ'' sind die $\gamma''(m_\lambda)$, $\lambda > 1$, paarweise linear abhängig; insbesondere gilt also

$$\beta_\lambda \nu_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(m_\lambda) = \beta_\kappa \nu_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(m_\kappa), \quad (\beta_\lambda, \beta_\kappa) \neq (0,0) \qquad (1.4)$$

für alle $\lambda, \kappa \neq 1$. Die Abbildung δ: $X \to F_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X)$, $\delta(x) = 1$ für alle $x \in X$, läßt sich auf ganz $F(X)$ und auch auf $F_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(X)$ als Homomorphismus eindeutig fortsetzen, da $\mathrm{Ke}\, \nu_{\mathcal{R} \cup \{R\}} \subset F'(X)$ und $F'(X)$ durch δ auf 0 abgebildet wird. Nun ist für $x \in X$ $\delta \nu_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(x) = \delta(x + \mathrm{Ke}\, \nu_{\mathcal{R} \cup \{R\}}) = \delta(x) = 1$ und damit auch $\delta \nu_{\mathcal{R} \cup \{R\}}(m) = 1$ für $m \in M(X)$; wenden wir δ also auf (1.4) an, so erhalten wir $\beta_\lambda = \beta_\kappa$ wegen der Homogenität von R. Nach Satz (1.3) ist $\gamma'' = \overline{\gamma''}\, \nu_{\mathcal{R} \cup \{R\}}$ mit einem geeigneten Homomorphismus $\overline{\gamma''}$; aus (1.4) und dem eben Bewiesenen folgt also

$$\gamma''(m_\lambda - m_\kappa) = 0 \qquad (1.5)$$

für $\lambda, \kappa > 1$. Auf der rechten Seite von (1.2) können wir daher $\gamma''(m_\lambda)$ durch $\gamma''(m_2)$ ersetzen und erhalten aus

(1.2): $\alpha_1 \gamma''(m_1) = -\sum_{\lambda>1} \alpha_\lambda \cdot \gamma''(m_2)$. Dieselbe Überlegung wie eben zeigt, daß (1.5) sogar für alle λ und κ gelten muß. $\mathcal{R} \cup \{R\}$ impliziert also die Relationen $R_{\lambda\kappa} = m_\lambda - m_\kappa$ und die Relationen aus $\mathcal{R}$.- Umgekehrt ist $R = \sum_\lambda \alpha_\lambda (R_{\lambda 1} + m_1) = \sum_\lambda \alpha_\lambda R_{\lambda 1} + (\sum_\lambda \alpha_\lambda) m_1 = \sum_\lambda \alpha_\lambda R_{\lambda 1}$; danach impliziert die Menge $\mathcal{R} \cup \{R_{\lambda\kappa}\}$ auch die Relation R (und die Relationen aus $\mathcal{R}$), die behauptete Äquivalenz ist damit gezeigt.

(2) Es gibt einen Homomorphismus γ'', so daß o.E.d.A. $\gamma''(m_2), \ldots, \gamma''(m_r)$, $r > 2$, eine Basis des von den $\gamma''(m_\lambda)$, $\lambda > 1$, aufgespannten Vektorraums bilden. Dann ist $\gamma''(m_\lambda) = \sum_{\varrho=2}^{r} \alpha_{\lambda\varrho}\, \gamma''(m_\varrho)$, eingesetzt in (1.3):

$$0 = \sum_{\lambda>1} \{\alpha_\lambda \{\gamma'(m_\lambda) - \gamma'(m_1)\} \otimes \sum_{\varrho=2}^{r} \alpha_{\lambda\varrho}\, \gamma''(m_\varrho)\} =$$

$$= \sum_{\varrho=2}^{r} \sum_{\lambda>1} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda\varrho} \{\gamma'(m_\lambda) - \gamma'(m_1)\} \otimes \gamma''(m_\varrho)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\gamma''(m_\varrho)$ gilt:

$$\sum_{\lambda>1} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda\varrho} \{\gamma'(m_\lambda) - \gamma'(m_1)\} = 0 \quad \text{für alle } \varrho.$$

$F_{\mathcal{R}\cup\{R\}}(X)$ erfüllt also die Relationen $R_\varrho = \sum_{\lambda>1} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda\varrho}(m_\lambda - m_1)$. Da $\alpha_{\lambda\varrho} = 0$ für $\lambda \neq \varrho$, $\lambda \leq r$, haben diese Relationen geringere Länge als R. Wegen

$$\sum_{\varrho=1}^{r} R_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\lambda>1} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda\varrho} (m_\lambda - m_1) = \sum_{\lambda>1} \alpha_\lambda (m_\lambda - m_1) \sum_{\varrho=1}^{r} \alpha_{\lambda\varrho} =$$

$$= \sum_{\lambda>1} \alpha_\lambda m_\lambda - \sum_{\lambda>1} \alpha_\lambda m_1 = \sum_\lambda \alpha_\lambda m_\lambda - \sum_\lambda \alpha_\lambda m_1 = R$$

ist wie oben $\mathcal{R} \cup \{R\}$ äquivalent zu $\mathcal{R} \cup \{R_1, \ldots, R_r\}$. Durch Iteration des Verfahrens können wir erreichen, daß die R_ϱ sämtlich eine Länge ≤ 2 haben; wegen $R_\varrho \in F'(X)$ kann Länge 1 aber nicht auftreten. Die Richtigkeit der Zusatzbehauptung ist direkt aus der Struktur der $R_{\lambda\kappa}$ bzw. R_ϱ ersichtlich.

Sei nun $\mathcal{R}$ eine vererbbare Menge von Relationen über

K. Dann gibt es zu jedem $R_i \in \mathcal{R}$ eine lineare Relation R_i', die durch mehrmaliges Polarisieren entsteht und nach Lemma (1.6) von R_i impliziert wird; insbesondere ist also $\mathcal{R}$ zu $\mathcal{R} \cup \{R_1', R_2', \ldots\}$ äquivalent; damit ist auch $\mathcal{R} \cup \{R_1', R_2', \ldots\}$ vererbbar. Nach Satz (1.11) können wir R_i' durch eine Menge linearer Relationen der Länge 2 äquivalent ersetzen, die aber nach Satz (1.10) zu {Kom} oder {Ass} oder {Kom,Ass} äquivalent sind, d.h. $\mathcal{R}$ ist äquivalent zu $\mathcal{R} \cup \{\text{Kom}\}$ oder $\mathcal{R} \cup \{\text{Ass}\}$ oder $\mathcal{R} \cup \{\text{Kom,Ass}\}$. Im letzteren Fall ist sogar Äquivalenz mit {Kom,Ass} gegeben, da diese beiden Relationen jede andere implizieren.

Betrachten wir den Fall, daß $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R} \cup \{\text{Kom}\}$ äquivalent sind und bezeichnen mit $\nu : F(X) \to F_{\text{Kom}}(X)$ den kanonischen Epimorphismus. $F_{\mathcal{R} \cup \{\text{Kom}\}}(X)$ ist epimorphes Bild von $F_{\text{Kom}}(X)$; jeder Homomorphismus $\gamma : F(X) \to F_{\mathcal{R} \cup \{\text{Kom}\}}(X)$ läßt sich über ν faktorisieren: $\gamma = \gamma^* \nu$. Ist nun $R \in \mathcal{R}$, so gibt es ein $R^* \in F(X)$, das der Gleichung $\nu(R^*) = \nu(R)$ genügt und bezüglich Kom reduziert ist. Dann ist $\gamma(R^*) = \gamma^* \nu(R^*) = \gamma^* \nu(R) = \gamma(R) = 0$, d.h. $\mathcal{R} \cup \{\text{Kom}\}$ und $(\mathcal{R} \setminus \{R\}) \cup \{\text{Kom}, R^*\}$ sind äquivalent. Führen wir dieses Verfahren für jedes $R \in \mathcal{R}$ durch und beachten, daß dieselben Überlegungen statt für Kom auch für Ass gelten, so sehen wir, daß wir für die noch nicht erledigten Fälle annehmen können, daß $\mathcal{R}$ zu $\mathcal{R}^* \cup \{\text{Kom}\}$ oder $\mathcal{R}^* \cup \{\text{Ass}\}$ äquivalent ist, wobei jedes $R_i^* = \sum_\lambda \alpha_\lambda m_\lambda \in \mathcal{R}^*$ bezüglich Kom bzw. Ass reduziert ist. Das zugehörige $R_i^{*\prime} = DR_i^*$ wird nun durch {Kom} bzw. {Ass} impliziert, jedes einzelne $m_\lambda' = Dm_\lambda$ wird dann nach Lemma (1.8) durch {Kom} bzw. {Ass} impliziert. Im Falle "Ass" ist das nach dem Korollar zu Lemma (1.9) nicht möglich, es sei denn

$R_i^* = 0$. Dann ist also $\mathcal{R}^* = \{0\}$ und $\mathcal{R}$ zu Ass äquivalent. Im Falle "Kom" und Char $K \neq 2$ folgt analog, daß $\mathcal{R}$ zu $\{Kom\}$ äquivalent ist; im Fall Char $K = 2$ treten zusammen mit Kom weitere Relationen auf, z.B. die Jordan-Identität $u^2(vw) - v(u^2w)$, der wir uns in Teil B.II zuwenden werden, oder $(uv)^2 - u^2v^2$ usw. Zusammenfassend gilt also folgender

Hauptsatz: Eine Menge von Relationen $\mathcal{R} \subset F(X)$ über einem unendlichen Körper K mit Char $K \neq 2$ ist genau dann vererbbar, wenn $\mathcal{R}$ äquivalent zu $\{Kom\}$ oder $\{Ass\}$ oder $\{Kom,Ass\}$ ist.

Zum Beweis brauchen wir nur noch anzumerken, daß Kom und Ass vererbbar sind, wie durch elementare Rechnung nachprüfbar ist.

§2. Einfachheit und Zentralität.

Wir interessieren uns nun für die Frage, inwieweit Einfachheit und Zentralität von Algebren sich auf das Tensorprodukt übertragen. Dazu definieren wir:

Definition: $\mathfrak{A}$ heißt nuklear, wenn $\mathcal{N}(\mathfrak{A}) = Ke_\alpha$ gilt.
$\mathfrak{A}$ heißt zentral, wenn $\mathfrak{z}(\mathfrak{A}) = Ke_\alpha$ gilt.

Insbesondere ist also jede nukleare Algebra zentral. Am Beispiel der zentralen assoziativen Algebren höherer Dimension sehen wir, daß die Umkehrung falsch ist.

Satz (2.1): $\mathcal{N}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}) = \mathcal{N}(\mathfrak{A})\otimes\mathcal{N}(\mathfrak{B})$

Beweis: Es sei $z \in \mathcal{N}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$. Ist $\{y_1,\dots,y_m\}$ eine Basis von $\mathfrak{B}$, so läßt sich z schreiben als $z = \sum_\mu u_\mu \otimes y_\mu$ mit $u_\mu \in \mathfrak{A}$. Aus $z[(x\otimes e_\varkappa)(w\otimes e_\varkappa)] = [z(x\otimes e_\varkappa)](w\otimes e_\varkappa)$ folgt $\sum_\mu u_\mu(xw)\otimes y_\mu = \sum_\mu (u_\mu x)w\otimes y_\mu$. Entsprechend erhalten wir diejenigen beiden anderen Gleichungen, die uns zeigen, daß $u_\mu \in \mathcal{N}(\mathfrak{A})$ für alle μ gilt. Ist nun $\{x_1,\dots,x_k\}$ eine Basis von $\mathcal{N}(\mathfrak{A})$, so können wir z schreiben als $z = \sum_\kappa x_\kappa \otimes v_\kappa$ mit $v_\kappa \in \mathfrak{B}$ und finden entsprechend $v_\kappa \in \mathcal{N}(\mathfrak{B})$. Also ist $z \in \mathcal{N}(\mathfrak{A})\otimes\mathcal{N}(\mathfrak{B})$.
Sei umgekehrt $z \in \mathcal{N}(\mathfrak{A})\otimes\mathcal{N}(\mathfrak{B})$, d.h. $z = \sum_\varsigma u_\varsigma \otimes v_\varsigma$ mit $u_\varsigma \in \mathcal{N}(\mathfrak{A})$, $v_\varsigma \in \mathcal{N}(\mathfrak{B})$. Dann gilt:

$$z\Big[\Big(\sum_\lambda x'_\lambda \otimes y'_\lambda\Big)\Big(\sum_\nu x''_\nu \otimes y''_\nu\Big)\Big] = \Big[z\Big(\sum_\lambda x'_\lambda \otimes y'_\lambda\Big)\Big]\Big(\sum_\nu x''_\nu \otimes y''_\nu\Big)$$

für alle $\sum_\lambda x'_\lambda \otimes y'_\lambda \in \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ und $\sum_\nu x''_\nu \otimes y''_\nu \in \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ und entsprechend die anderen Gleichungen, wie wir durch Rechnung leicht bestätigen. Das bedeutet aber: $z \in \mathcal{N}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$, q.e.d.

Korollar: Das Tensorprodukt zweier nuklearer Algebren ist nuklear.

Satz (2.2): $\mathfrak{z}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{A})\otimes\mathfrak{z}(\mathfrak{B})$

Beweis: Zunächst gilt $\mathfrak{z}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{N}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{A})\otimes\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$, d.h. wir können jedes $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ schreiben in der Form $z = \sum_{\mu} x_\mu \otimes y_\mu$, wobei $x_\mu \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ und $\{y_1,\dots,y_m\}$ eine Basis von $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$ ist. Aus $z(x\otimes e_\beta) = (x\otimes e_\beta)z$ folgt wegen der Basiseigenschaft der y_μ wie oben $x_\mu x = x x_\mu$ für alle μ, d.h. $x_\mu \in \mathfrak{z}(\mathfrak{A})$ für alle μ. Ist $\{u_1,\dots,u_k\}$ eine Basis von $\mathfrak{z}(\mathfrak{A})$, so schreibt sich z als $z = \sum_{\kappa} u_\kappa \otimes v_\kappa$ mit $v_\kappa \in \mathfrak{z}(\mathfrak{B})$, und durch Multiplikation mit $e_\alpha \otimes y$ finden wir $v_\kappa \in \mathfrak{z}(\mathfrak{B})$ und damit $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{A})\otimes\mathfrak{z}(\mathfrak{B})$.
Umgekehrt ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{A})\otimes\mathfrak{z}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{N}(\mathfrak{A})\otimes\mathfrak{N}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$. Jedes $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{A})\otimes\mathfrak{z}(\mathfrak{B})$ schreibt sich als $z = \sum_{\mu} u_\mu \otimes v_\mu$ mit $u_\mu \in \mathfrak{z}(\mathfrak{A})$, $v_\mu \in \mathfrak{z}(\mathfrak{B})$. Daraus folgt

$$z\Big(\sum_{\lambda} x'_\lambda \otimes y'_\lambda\Big) = \Big(\sum_{\lambda} x'_\lambda \otimes y'_\lambda\Big)z$$

für alle $\sum_{\lambda} x'_\lambda \otimes y'_\lambda \in \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ und damit die Behauptung.

Korollar: Das Tensorprodukt zweier zentraler Algebren ist zentral.

Für die Einfachheit gilt bekanntlich schon für assoziative Algebren ein entsprechender Satz nicht allgemein. Wir verschärfen die Voraussetzungen etwas und zeigen:

Satz (2.3): Das Tensorprodukt einer zentral-einfachen mit einer einfachen Algebra ist einfach.

Beweis: Es sei $(0) \neq \pi \subset \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ ein Ideal in $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ zentral-einfach, $\mathfrak{B}$ einfach. Wir wählen ein $z \in \pi$ so, daß

in der Darstellung $z = u_1 \otimes y_1 + \ldots + u_k \otimes y_k$ die Zahl k minimal ist bezüglich aller $z \in \mathfrak{r}$, $z \neq 0$ und aller Basen $\{y_k\}$ in $\mathfrak{B}$, wenn wir nur die von 0 verschiedenen Summanden mitschreiben. Da $\mathfrak{A}$ einfach ist und $u_1 \neq 0$, erzeugt u_1 ganz $\mathfrak{A}$ als Ideal; man kann also aus u_1 stets $e_{\mathfrak{A}}$ bekommen durch endlichmalige Multiplikationen und Additionen. Führen wir dieselben Operationen mit z aus, indem wir stets Elemente $u \otimes e_{\mathfrak{B}}$ verwenden, so erhalten wir ein $z' \in \mathfrak{r}$, $z' \neq 0$ mit $z' = e_{\mathfrak{A}} \otimes y_1 + \ldots + u'_k \otimes y_k$.

Angenommen, es gilt $k > 1$, so ist $u'_k \notin \mathrm{Ke}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{A})$ wegen der Minimalität von k, d.h. es existiert

ein $v \in \mathfrak{A}$ mit: $u'_k v \neq v u'_k$

oder Elemente $v', v'' \in \mathfrak{A}$ mit: $(u'_k v')v'' \neq u'_k(v'v'')$

oder Elemente $v', v'' \in \mathfrak{A}$ mit: $(v'u'_k)v'' \neq v'(u'_k v'')$

oder Elemente $v', v'' \in \mathfrak{A}$ mit: $(v'v'')u'_k \neq v'(v''u'_k)$

Wir bilden nun $(v \otimes e_{\mathfrak{B}})z' - z'(v \otimes e_{\mathfrak{B}}) \neq 0$ bzw.

$\left[z'(v' \otimes e_{\mathfrak{B}})\right](v'' \otimes e_{\mathfrak{B}}) - z'\left[(v' \otimes e_{\mathfrak{B}})(v'' \otimes e_{\mathfrak{B}})\right] \neq 0$ bzw.

$\left[(v' \otimes e_{\mathfrak{B}})z'\right](v'' \otimes e_{\mathfrak{B}}) - (v' \otimes e_{\mathfrak{B}})\left[z'(v'' \otimes e_{\mathfrak{B}})\right] \neq 0$ bzw.

$\left[(v' \otimes e_{\mathfrak{B}})(v'' \otimes e_{\mathfrak{B}})\right]z' - (v' \otimes e_{\mathfrak{B}})\left[(v'' \otimes e_{\mathfrak{B}})z'\right] \neq 0$ und

erhalten ein Element von $\mathfrak{r}$ mit kleinerem k, da der erste Summand wegfällt, wie man unmittelbar sieht. Also war entgegen unserer Annahme $k = 1$, d.h. $z' = e_{\mathfrak{A}} \otimes y_1$. Da $\mathfrak{B}$ einfach ist und $y_1 \neq 0$, erzeugt y_1 ganz $\mathfrak{B}$ als Ideal; dann können wir aber wie oben ein $z'' \in \mathfrak{r}$, $z'' \neq 0$ so finden, daß $z'' \in K(e_{\mathfrak{A}} \otimes e_{\mathfrak{B}})$. Dann ist aber $\mathfrak{r} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, q.e.d.

Korollar 1: Das Tensorprodukt zweier zentral-einfacher Algebren ist zentral-einfach.

Beweis: Das Tensorprodukt ist zentral nach dem Korollar zu

Satz (2.2) und einfach nach Satz (2.3).

Korollar 2: Das Tensorprodukt zweier einfacher Algebren über algebraisch-abgeschlossenem Körper ist einfach.

Beweis: Nach dem Korollar 2 zu Satz (I;5.1) [4] ist das Zentrum einer einfachen Algebra isomorph einem endlichen Erweiterungskörper des Grundkörpers, im algebraisch-abgeschlossenen Fall also isomorph dem Grundkörper. Einfache Algebren sind dann also stets zentral-einfach, und daraus folgt die Behauptung.

§3. Linearformen.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung nichtassoziativer Algebren bilden die Linearformen, mit deren Übertragung auf Tensorprodukte wir uns nun beschäftigen wollen. Um uns einfacher ausdrücken zu können, nennen wir eine Linearform nichtausgeartet, wenn ihre zugeordnete Bilinearform nichtausgeartet ist.

Satz (3.1): Es sei $\lambda_{\mathfrak{A}}$ eine assoziative Linearform auf $\mathfrak{A}$ und $\lambda_{\mathfrak{B}}$ eine assoziative Linearform auf $\mathfrak{B}$. Dann ist die durch lineare Fortsetzung der Abbildung

$$x \otimes y \longrightarrow \lambda_{\mathfrak{A}}(x)\ \lambda_{\mathfrak{B}}(y)$$

gegebene Linearform λ assoziativ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Assoziativität von $\lambda_{\mathfrak{A}}$ und $\lambda_{\mathfrak{B}}$.

Wir schreiben für dieses λ auch $\lambda = \lambda_{\mathfrak{A}} \otimes \lambda_{\mathfrak{B}}$.

Satz (3.2): Mit $\lambda_{\mathfrak{A}}$ und $\lambda_{\mathfrak{B}}$ ist auch $\lambda_{\mathfrak{A}} \otimes \lambda_{\mathfrak{B}}$ nichtausgeartet.

Beweis: Für alle $w \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ sei $(\lambda_{\mathfrak{A}} \otimes \lambda_{\mathfrak{B}})((\sum_i a_i \otimes b_i)w) = 0$. Insbesondere ist dann – für $w = u \otimes v$ –

$$0 = \sum_i \lambda_{\mathfrak{A}}(a_i u)\lambda_{\mathfrak{B}}(b_i v) = \lambda_{\mathfrak{A}}(\sum_i \lambda_{\mathfrak{B}}(b_i v)a_i \cdot u)$$

für alle $u \in \mathfrak{A}$, und es muß, da $\lambda_{\mathfrak{A}}$ nichtausgeartet ist, $\sum_i \lambda_{\mathfrak{B}}(b_i v)a_i = 0$ sein. Wir können o.E.d.A. annehmen, daß die a_i linear unabhängig sind, und erhalten damit $\lambda_{\mathfrak{B}}(b_i v) = 0$ für alle i und alle $v \in \mathfrak{B}$. Da auch $\lambda_{\mathfrak{B}}$ nichtausgeartet ist, folgt $b_i = 0$ und damit die Behauptung.

Definiert man nun mit Braun-Koecher das Radikal einer Algebra als den Durchschnitt der Bilinearkerne aller semi-normalen Linearformen auf der Algebra:

$$\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A} := \bigcap_{\lambda \text{ semi-normal}} \{u \in \mathfrak{A} : \lambda(uv) = 0 \text{ für alle } v \in \mathfrak{A}\},$$

und nennt eine Algebra halbeinfach, wenn $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A} = 0$ ist, so weiß man ([4], I; §7), daß halbeinfache Algebren eine nicht-ausgeartete semi-normale Linearform besitzen. Da die Halbeinfachheit bereits bei Grundkörpererweiterungen verloren gehen kann, zeigt der vorige Satz, daß im allgemeinen mit $\lambda_{\mathfrak{A}}$ und $\lambda_{\mathfrak{B}}$ keineswegs $\lambda_{\mathfrak{A}} \otimes \lambda_{\mathfrak{B}}$ semi-normal ist.

§4. Derivationen.

Wir wollen nun die Derivationsalgebra $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{L})$ aus den Derivationsalgebren $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ bestimmen. Wir erinnern daran, daß stets

$$D(e) = 0, \quad D\in\mathfrak{D} \tag{4.1}$$

gilt.- Von nun an sei $\{b_i\}$ eine feste Basis von $\mathfrak{L}$; die Buchstaben D,E,... ohne Indizes bezeichnen Derivationen von $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{L}$.- Wegen der Linearität einer Derivation D folgt aus $D(\sum_i u_i\otimes b_i) = \sum_i \eta_i(u_1,\dots,u_N)\otimes b_i$ und $D(\sum_i v_i\otimes b_i) = \sum_i \eta_i(v_1,\dots,v_N)\otimes b_i$ die Gleichung $\eta_i(u_1,\dots,u_N) + \eta_i(v_1,\dots,v_N) = \eta_i(u_1+v_1,\dots,u_N+v_N)$ für alle i; im Spezialfall $v_2 = v_3 = \dots = v_N = 0$ bedeutet das $\eta_i(u_1+v_1,u_2,\dots,u_N) = \eta_i(u_1,u_2,\dots,u_N) + \eta_i(v_1,0,\dots,0)$. Wir setzen nun

$$D_{ik}(u) := \eta_i(0,\dots,0,\underset{\uparrow\text{ k-te Stelle}}{u},0,\dots,0)$$

und erhalten

$$\eta_i(u_1,\dots,u_N) = \sum_k D_{ik}(u_k)$$

mit K-linearen Abbildungen $D_{ik}\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, durch die sich die Derivation D als

$$D(\sum_i u_i\otimes b_i) = \sum_i(\sum_k D_{ik}(u_k))\otimes b_i \tag{4.2}$$

ausdrücken läßt.

Nun ist (mit $b_ib_j = \sum_l \beta^l_{ij}b_l$)

$$D([\sum_i u_i\otimes b_i][\sum_j v_j\otimes b_j]) = D(\sum_{ij} u_iv_j\otimes b_ib_j) =$$

$$= D(\sum_{ijl} \beta^l_{ij}u_iv_j\otimes b_l) = D(\sum_l(\sum_{ij} \beta^l_{ij}u_iv_j)\otimes b_l) =$$

$$= \sum_l(\sum_k D_{lk}(\sum_{ij} \beta^k_{ij}u_iv_j))\otimes b_l = \sum_l(\sum_{ijk} \beta^k_{ij}D_{lk}(u_iv_j))\otimes b_l$$

nach (4.2); andererseits ist, ebenfalls nach (4.2)

$$D\Big(\Big[\sum_i u_i \otimes b_i\Big]\Big[\sum_j v_j \otimes b_j\Big]\Big) =$$

$$= D\Big(\sum_i u_i \otimes b_i\Big)\cdot\Big(\sum_j v_j \otimes b_j\Big) + \Big(\sum_i u_i \otimes b_i\Big)\cdot D\Big(\sum_j v_j \otimes b_j\Big) =$$

$$= \Big[\sum_i \Big(\sum_k D_{ik}(u_k)\Big) \otimes b_i\Big]\Big(\sum_j v_j \otimes b_j\Big) + \Big(\sum_i u_i \otimes b_i\Big)\Big[\sum_j \Big(\sum_k D_{jk}(v_k)\Big) \otimes b_j\Big] =$$

$$= \sum_{ij}\Big(\sum_k D_{ik}(u_k)\cdot v_j\Big) \otimes \Big(\sum_l \beta^1_{ij} b_l\Big) + \sum_{ij}\Big(u_i \sum_k D_{jk}(v_k)\Big) \otimes \Big(\sum_l \beta^1_{ij} b_l\Big) =$$

$$= \sum_l \Big[\sum_{ijk} \beta^1_{ij}\big(D_{ik}(u_k)v_j + u_i D_{jk}(v_k)\big)\Big] \otimes b_l .$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\sum_{ijk} \beta^k_{ij} D_{lk}(u_i v_j) = \sum_{ijk} \beta^1_{ij}\big[D_{ik}(u_k)v_j + u_i D_{jk}(v_k)\big] =$$

$$= \sum_{ijk}\big[\beta^1_{kj} D_{ki}(u_i)v_j + \beta^1_{ik} u_i D_{kj}(v_j)\big] \quad (4.3)$$

Aus (4.3) leiten wir nun Eigenschaften der D_{ik} ab und zeigen anschließend, daß diese hinreichen, um die Abbildung D aus (4.2) als Derivation zu erkennen. Dazu nehmen wir o.E.d.A. an, daß $b_1 = e$ ist, und somit $\beta^k_{1j} = \delta_{jk} = \beta^k_{j1}$ gilt. Außerdem setzen wir $d_{ik} := D_{ik}(e)$. Durch die Ersetzung von u_i durch $\delta_{mi}u$ und v_j durch $\delta_{nj}v$ gehen wir in (4.3) zu einem Spezialfall über:

$$\sum_{ijk} \beta^k_{ij} D_{lk}(\delta_{mi}u\cdot \delta_{nj}v) =$$

$$= \sum_{ijk}\big[\beta^1_{kj} D_{ki}(\delta_{mi}u)\,\delta_{nj}v + \beta^1_{ik}\,\delta_{mi}u\cdot D_{kj}(\delta_{nj}v)\big]$$

oder

$$\sum_k \beta^k_{mn} D_{lk}(uv) = \sum_k\Big[\beta^1_{kn} D_{km}(u)v + \beta^1_{mk} u\cdot D_{kn}(v)\Big] \quad (4.4)$$

<u>Lemma (4.1):</u> Jedes D_{l1} ist eine Derivation von $\mathfrak{A}$, und die D_{ln} lassen sich ausdrücken als $D_{ln} = \sum_k \beta^1_{kn} D_{k1} + R(d_{ln})$

<u>Beweis:</u> (1) In (4.4) setzen wir m = n = 1 und erhalten

$$\sum_k \delta_{1k} D_{lk}(uv) = \sum_k\big[\delta_{kl} D_{k1}(u)v + u\cdot D_{k1}(v)\,\delta_{kl}\big]$$

und damit $D_{l1}(uv) = D_{l1}(u)v + u\cdot D_{l1}(v)$.

(2) Die Einsetzung v = e und m = 1 ergibt

$$\sum_k \delta_{nk} D_{lk}(u) = \sum_k \left[\beta^1_{kn} D_{k1}(u) + \delta_{kl} u \cdot D_{kn}(e) \right]$$

oder $D_{ln}(u) = \sum_k \beta^1_{kn} D_{k1}(u) + u d_{ln}$, und damit die Behauptung.

Um Eigenschaften der d_{ln} zu erhalten, tragen wir $u = e$ und $n = 1$ in (4.4) ein:

$$\sum_k \delta_{mk} D_{lk}(v) = \sum_k \left[\delta_{kl} D_{km}(e) v + \beta^1_{mk} D_{k1}(v) \right].$$

Die daraus entstehende Gleichung $D_{lm}(v) = d_{lm} v + \sum_k \beta^1_{mk} D_{k1}(v)$ führt durch Vergleich mit Lemma (4.1) auf

$$\sum_k (\beta^1_{mk} - \beta^1_{km}) D_{k1}(v) = v d_{lm} - d_{lm} v \qquad (4.5)$$

Als nächsten Schritt setzen wir in (4.4) $m = 1$ ein:

$$\sum_k \delta_{nk} D_{lk}(uv) = \sum_k \left[\beta^1_{kn} D_{k1}(u) v + \delta_{kl} u \cdot D_{kn}(v) \right]$$

und erhalten daraus

$$D_{ln}(uv) = \sum_k \beta^1_{kn} D_{k1}(u) v + u \cdot D_{ln}(v).$$

Unter Benutzung von Lemma (4.1) können wir

$$\sum_k \beta^1_{kn} D_{k1}(uv) + (uv) d_{ln} = \sum_k \beta^1_{kn} D_{k1}(u) v + u \sum_k \beta^1_{kn} D_{k1}(v) + u(v d_{ln})$$

und schließlich

$$(uv) d_{ln} = u(v d_{ln}) \qquad (4.6)$$

folgern. Ganz analog dazu können wir auch $n = 1$ setzen. Dann erhalten wir

$$\sum_k \delta_{mk} D_{lk}(uv) = \sum_k \left[\delta_{kl} D_{km}(u) v + \beta^1_{mk} u \cdot D_{k1}(v) \right]$$

und wie oben

$$D_{lm}(uv) = D_{lm}(u) v + \sum_k \beta^1_{mk} u \cdot D_{k1}(v).$$

Außer Lemma (4.1) verwenden wir noch (4.5):

$$\sum_k \beta^1_{km} D_{k1}(uv) + (uv) d_{lm} =$$

$$= \sum_k \beta^1_{km} D_{k1}(u) v + (u d_{lm}) v + \sum_k \beta^1_{mk} u \cdot D_{k1}(v) =$$

$$= \sum_k \beta^l_{km} D_{k1}(u)v + (ud_{lm})v + \sum_k \beta^l_{km} u\, D_{k1}(v) + u(vd_{lm}) - u(d_{lm}v) =$$

$$= \sum_k \beta^l_{km} D_{k1}(uv) + u(vd_{lm}) - u(d_{lm}v),$$

und mit (4.6) wird daraus:

$$(ud_{lm})v = u(d_{lm}v) \tag{4.7}$$

Wir behaupten nun:

Lemma (4.2): $d_{lm} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$

Beweis: In (4.5) ersetzen wir v durch uv und benützen Lemma (4.1) und (4.5):

$$(uv)d_{lm} - d_{lm}(uv) = \sum_k (\beta^l_{mk} - \beta^l_{km}) D_{k1}(uv) =$$

$$= \sum_k (\beta^l_{mk} - \beta^l_{km}) D_{k1}(u)v + \sum_k (\beta^l_{mk} - \beta^l_{km}) u \cdot D_{k1}(v) =$$

$$= (ud_{lm})v - (d_{lm}u)v + u(vd_{lm}) - u(d_{lm}v).$$

Daraus folgt die Behauptung unter Verwendung von (4.6) und (4.7).

Die d_{lm} sind untereinander noch durch Bedingungen verknüpft. Um das einzusehen, setzen wir in (4.4) u = v = e:

$$\sum_k \beta^k_{mn} d_{lk} = \sum_k (\beta^l_{kn} d_{km} + \beta^l_{mk} d_{kn}) \tag{4.8}$$

Drei weitere Gleichungen verknüpfen die Derivationen D_{i1} mit den Multiplikationskonstanten β^k_{ij}: In (4.4) setzen wir v = e, tragen die Ergebnisse von Lemma (4.1) ein und erhalten:

$$\sum_k \beta^k_{mn} D_{lk}(u) = \sum_k \left[\beta^l_{kn} D_{km}(u) + \beta^l_{mk} u \cdot D_{kn}(e) \right],$$

$$\sum_{ki} \beta^k_{mn} \beta^l_{mk} D_{i1}(u) + \sum_k \beta^k_{mn} u d_{lk} =$$

$$= \sum_{ki} \beta^l_{kn} \beta^k_{im} D_{i1}(u) + \sum_k \beta^l_{kn} u d_{km} + \sum_k \beta^l_{mk} u d_{kn}$$

und unter Verwendung von (4.8)

$$\sum_i \Big(\sum_k \big(\beta^k_{mn}\beta^l_{ik} - \beta^l_{kn}\beta^k_{im}\big)\Big) D_{i1}(u) = 0 \qquad (4.9)$$

Ebenso können wir in (4.4) u = e setzen:

$$\sum_k \beta^k_{mn} D_{lk}(v) = \sum_k \Big[\beta^l_{kn} D_{kr}(e)v + \beta^l_{mk} D_{kn}(v)\Big],$$

$$\sum_{k,i} \beta^k_{mn}\beta^l_{ik} D_{i1}(v) + \sum_k \beta^k_{mn} v d_{lk} =$$

$$= \sum_k \beta^l_{kn} d_{km} v + \sum_{k,i} \beta^l_{mk}\beta^k_{in} D_{i1}(v) + \sum_k \beta^l_{mk} v d_{kn} \overset{(4.5)}{=}$$

$$= \sum_k \beta^l_{kn} v d_{km} - \sum_{k,i} \beta^l_{kn}\big(\beta^k_{mi} - \beta^k_{im}\big) D_{i1}(v) +$$

$$+ \sum_{k,i} \beta^l_{mk}\beta^k_{in} D_{i1}(v) + \sum_k \beta^l_{mk} v d_{kn}$$

und - mit (4.5) -

$$\sum_{k,i} \beta^k_{mn}\beta^l_{ik} D_{i1}(v) = \sum_{k,i} \big(-\beta^l_{kn}\beta^k_{mi} + \beta^l_{kn}\beta^k_{im} + \beta^l_{mk}\beta^k_{in}\big) D_{i1}(v).$$

Die eben abgeleitete Formel (4.9) liefert dann

$$\sum_i \Big(\sum_k \big(\beta^l_{mk}\beta^k_{in} - \beta^l_{kn}\beta^k_{mi}\big)\Big) D_{i1}(u) = 0 \qquad (4.10)$$

Schließlich berechnen wir noch

$$\sum_i \Big(\sum_k \big(\beta^k_{mi}\beta^l_{nk} - \beta^k_{nm}\beta^l_{ki}\big)\Big) D_{i1}(u) =$$

$$= \sum_{i,k} \beta^k_{mi}\beta^l_{nk} D_{i1}(u) - \sum_k \beta^k_{nm}\Big(\sum_i \beta^l_{ki} D_{i1}(u)\Big) \overset{(4.5)}{=}$$

$$= \sum_{i,k} \beta^k_{mi}\beta^l_{nk} D_{i1}(u) - \sum_k \beta^k_{nm}\Big(\sum_i \beta^l_{ik} D_{i1}(u) + u d_{lk} - d_{lk} u\Big) =$$

$$= \sum_{i,k} \big(\beta^k_{mi}\beta^l_{nk} - \beta^k_{nm}\beta^l_{ik} + \beta^k_{in}\beta^l_{km} - \beta^k_{in}\beta^l_{km}\big) D_{i1}(u) -$$

$$- \sum_k \beta^k_{nm}(u d_{lk} - d_{lk} u) =$$

$$= \sum_{i,k} \big(\beta^k_{mi}\beta^l_{nk} - \beta^k_{in}\beta^l_{km}\big) D_{i1}(u) - \sum_k \beta^k_{nm}(u d_{lk} - d_{lk} u) =$$

$$= \sum_k \beta^l_{nk}\Big(\sum_i \beta^k_{mi} D_{i1}(u)\Big) - \sum_k \beta^l_{km}\Big(\sum_i \beta^k_{in} D_{i1}(u)\Big) - \sum_k \beta^k_{nm}(u d_{lk} - d_{lk} u) =$$

$$= \sum_k \beta^l_{nk}\Big[\sum_i \beta^k_{im} D_{i1}(u) + u d_{km} - d_{km} u\Big] -$$

$$- \sum_k \beta^l_{km}\Big[\sum_i \beta^k_{ni} D_{i1}(u) - u d_{kn} + d_{kn} u\Big] - \sum_k \beta^l_{nm}(u d_{lk} - d_{lk} u) =$$

$$= \sum_{k,i} \big(\beta^l_{nk}\beta^k_{im} - \beta^l_{km}\beta^k_{ni}\big) D_{i1}(u) + \sum_k u\big(\beta^l_{nk} d_{km} + \beta^l_{km} d_{kn} - \beta^k_{nm} d_{lk}\big) +$$

$$+ \sum_k \big(-\beta^l_{nk} d_{km} - \beta^l_{km} d_{kn} + \beta^k_{nm} d_{lk}\big) u = 0$$

nach (4.10) und (4.8), d.h.

$$\sum_i \Big(\sum_k \big(\beta^k_{mi}\beta^l_{nk} - \beta^k_{nm}\beta^l_{ki}\big)\Big) D_{i1}(u) = 0 \qquad (4.11)$$

Um die drei zuletzt bewiesenen Identitäten in geschlossener Form schreiben zu können, führen wir auch in $\mathfrak{A}$ eine Basis $\{a_r\}$ ein und schreiben $D_{i1}(u) =: \sum_r \lambda_{ir}(u)a_r$. Nun bilden wir in (4.9),(4.10) und (4.11) das Tensorprodukt der linken Seiten mit b_l und summieren über l:

$$\sum_i D_{i1}(u) \otimes \sum_{k,l} \big(\beta^k_{mn}\beta^l_{ik} - \beta^l_{kn}\beta^k_{im}\big)b_l =$$

$$= \sum_i D_{i1}(u) \otimes \big[b_i(b_m b_n) - (b_i b_m)b_n\big] = 0$$

$$\sum_i D_{i1}(u) \otimes \sum_{k,l} \big(\beta^l_{mk}\beta^k_{in} - \beta^l_{kn}\beta^k_{mi}\big)b_l =$$

$$= \sum_i D_{i1}(u) \otimes \big[b_m(b_i b_n) - (b_m b_i)b_n\big] = 0$$

$$\sum_i D_{i1}(u) \otimes \sum_{k,l} \big(\beta^k_{mi}\beta^l_{nk} - \beta^k_{nm}\beta^l_{ki}\big)b_l =$$

$$= \sum_i D_{i1}(u) \otimes \big[b_n(b_m b_i) - (b_n b_m)b_i\big] = 0$$

Für alle $v,w \in \mathfrak{H}$ gilt also

$$\sum_i D_{i1}(u) \otimes \big[b_i(vw) - (b_i v)w\big] = \sum_i D_{i1}(u) \otimes \big[v(b_i w) - (vb_i)w\big] =$$

$$= \sum_i D_{i1}(u) \otimes \big[v(wb_i) - (vw)b_i\big] = 0$$

oder - mit der Definition der λ_{ir}:

$$\sum_i \lambda_{ir}(u)b_i \in \mathfrak{N}(\mathfrak{H}) \qquad (4.12)$$

Auch die d_{lm} drücken wir nun mit der Basis von $\mathfrak{A}$ aus: $d_{lm} =: \sum_r \delta^r_{lm}a_r$, und definieren damit lineare Abbildungen E_r: $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ durch die Festsetzung $E_r(b_k) := \sum_l \delta^r_{lk}b_l$.

Lemma (4.3): Die E_r sind Derivationen von $\mathfrak{H}$.

Beweis: Durch Einsetzen der δ^r_{lm} in (4.8) erhalten wir

$$\sum_{k,r} \beta^k_{mn}\delta^r_{lk}a_r = \sum_{k,r} \big(\beta^l_{kn}\delta^r_{km}a_r + \beta^l_{mk}\delta^r_{kn}a_r\big),$$

durch Koeffizientenvergleich, Multiplikation mit b_l und

Summation über l:

$$\sum_k \beta^k_{mn} E_r(b_k) = \sum_k (\delta^r_{km} b_k b_n + \delta^r_{kn} b_m b_k) = E_r(b_m) b_n + b_m E_r(b_n),$$

so daß wir wegen der Linearität von E_i auf die Behauptung schließen können.

Um uns im weiteren einfacher ausdrücken zu können, verwenden wir aus [4] die Bezeichnungen $L(u)$ für die Abbildung $v \to uv$ und entsprechend $R(u)$ für die Abbildung $v \to vu$. Unter $L(\mathfrak{A})$ verstehen wir $L(\mathfrak{A}) = \{L(u): u \in \mathfrak{A}\}$; $R(\mathfrak{A})$ wird analog definiert.

Lemma (4.4): $\mathfrak{Z}_0(\mathfrak{A}) = \{R(a) - L(a): a \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})\} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$

Beweis: $[R(a) - L(a)](uv) = (uv)a - a(uv) = u(va) - u(av) +$
$+ (ua)v - (au)v = u[R(a)v] - u[L(a)v] + [R(a)u]v - [L(a)u]v =$
$= u\{[R(a) - L(a)]v\} + \{[R(a) - L(a)]u\}v$, q.e.d.

Wir berechnen nun nach (4.2):

$$D(\sum_i u_i \otimes b_i) = \sum_i (\sum_k D_{ik}(u_k)) \otimes b_i = \sum_i (\sum_k (\sum_l \beta^i_{lk} D_{11}(u_k) + u_k d_{ik})) \otimes b_i =$$
$$= \sum_{k,l} \Big[D_{11}(u_k) \otimes \sum_i \beta^i_{lk} b_i \Big] + \sum_{i,k,r} u_k \delta^r_{ik} a_r \otimes b_i =$$
$$= \sum_{k,l} D_{11}(u_k) \otimes b_l b_k + \sum_{k,r} u_k a_r \otimes E_r(b_k).$$

Für $v_i = \sum_j \gamma_{ij} b_j$ wird damit

$$D(\sum_i u_i \otimes v_i) = D(\sum_{i,j} u_i \otimes \gamma_{ij} b_j) = D(\sum_j (\sum_i \gamma_{ij} u_i) \otimes b_j) =$$
$$= \sum_{i,k,l} D_{11}(\gamma_{ik} u_i) \otimes b_l b_k + \sum_{i,k,r} \gamma_{ik} u_i a_r \otimes E_r(b_k) =$$
$$= \sum_{i,l} D_{11}(u_i) \otimes b_l v_i + \sum_{i,r} u_i a_r \otimes E_r(v_i) =$$
$$= (\sum_l D_{11} \otimes L(b_l))(\sum_i u_i \otimes v_i) + (\sum_r R(a_r) \otimes E_r)(\sum_i u_i \otimes v_i). \quad (4.13)$$

Es sei nun die Basis $\{b_i\}$ so gewählt, daß $\{b_1, \ldots, b_{i_0}\}$ Basis von $\mathfrak{N}(\mathfrak{L})$ $(1 \leq i_0 \leq \dim_K \mathfrak{L})$ ist. Nach (4.12) ist dann $\lambda_{ir}(u) = 0$ für alle $u \in \mathfrak{A}$ und $i > i_0$, d.h. $D_{i1}(u) = 0$ für

$i > i_o$. Entsprechend sei die Basis $\{a_r\}$ so gewählt, daß $\{a_1,\dots,a_{r_o}\}$ Basis von $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ $(1 \leq r_o \leq \dim_K \mathfrak{A})$ ist. Lemma (4.2) zeigt dann, daß $\delta^r_{lm} = 0$ für $r > r_o$ und damit $E_r = 0$ für $r > r_o$. Daher genügt es, daß a_r bzw. b_i nur die Basen von $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ bzw. $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$ durchlaufen. Aus (4.5) folgt weiterhin

$$\sum_k (\beta^l_{mk} - \beta^l_{km}) D_{kl}(v) = v d_{lm} - d_{lm} v =$$
$$= v \sum_r \delta^r_{lm} a_r - \sum_r \delta^r_{lm} a_r v = \sum_r \delta^r_{lm} \left[R(a_r) - L(a_r)\right](v).$$

Tensorierung mit b_l und Summation über l zeigt

$$\sum_k D_{kl}(v) \otimes (b_m b_k - b_k b_m) = \sum_r \left[R(a_r) - L(a_r)\right](v) \otimes E_r(b_m).$$

Also können wir jedes $D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})$ in der Form (4.13) schreiben, wobei nach den Lemmata (4.1) und (4.3) $D_{11} = D_1 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ und $E_r \in \mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ und - wie eben bewiesen -

$$\sum_i D_i \otimes \left[R(b_i) - L(b_i)\right] = \sum_r \left[R(a_r) - L(a_r)\right] \otimes E_r \qquad (4.14)$$

gilt. Wir zeigen umgekehrt, daß jede der in (4.13) angegebenen Abbildungen eine Derivation von $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ist:

$$\left(\sum_i D_i \otimes L(b_i) + \sum_r R(a_r) \otimes E_r\right)\left(\left[\sum_j u_j \otimes v_j\right]\left[\sum_k u'_k \otimes v'_k\right]\right) =$$
$$= \sum_{i,j,k} D_i(u_j u'_k) \otimes b_i(v_j v'_k) + \sum_{j,k,r} (u_j u'_k) a_r \otimes E_r(v_j v'_k) =$$
$$= \sum_{i,j,k} \left[D_i(u_j) u'_k \otimes (b_i v_j) v'_k + u_j D_i(u'_k) \otimes b_i(v_j v'_k)\right] +$$
$$+ \sum_{j,k,r} u_j (u'_k a_r) \otimes E_r(v_j v'_k) \overset{(4.14)}{=}$$
$$= \sum_{i,j,k} \left[D_i(u_j) u'_k \otimes (b_i v_j) v'_k + u_j D_i(u'_k) \otimes (v_j v'_k) b_i\right] +$$
$$+ \sum_{j,k,r} u_j (a_r u'_k) \otimes E_r(v_j v'_k) =$$
$$= \sum_{i,j,k} \left[D_i(u_j) u'_k \otimes (b_i v_j) v'_k + u_j D_i(u'_k) \otimes v_j (v'_k b_i)\right] +$$
$$+ \sum_{j,k,r} \left[u_j (a_r u'_k) \otimes v_j E_r(v'_k) + u_j (a_r u'_k) \otimes E_r(v_j) v'_k\right] \overset{(4.14)}{=}$$
$$= \sum_{i,j,k} \left[D_i(u_j) u'_k \otimes (b_i v_j) v'_k + u_j D_i(u'_k) \otimes v_j (b_i v'_k)\right] +$$

$$+ \sum_{j,k,r} \left[u_j (u_k' a_r) \otimes v_j E_r(v_k') + u_j (a_r u_k') \otimes E_r(v_j) v_k' \right] =$$

$$= \left[(\sum_i D_i \otimes L(b_i) + \sum_r R(a_r) \otimes E_r)(\sum_j u_j \otimes v_j) \right] (\sum_k u_k' \otimes v_k') +$$

$$+ (\sum_j u_j \otimes v_j) \left[(\sum_i D_i \otimes L(b_i) + \sum_r R(a_r) \otimes E_r)(\sum_k u_k' \otimes v_k') \right].$$

Das in (4.13) und (4.14) erhaltene Ergebnis können wir mit Hilfe der folgenden Bezeichnungen einfacher formulieren:

$$\mathfrak{J}_L(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{A}) \otimes L(\eta(\mathfrak{B})); \quad \mathfrak{J}_R(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = R(\eta(\mathfrak{A})) \otimes \mathfrak{J}(\mathfrak{B})$$

$$\Phi_L: \mathfrak{J}_L(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{J}(\mathfrak{A}) \otimes \mathfrak{J}_o(\mathfrak{B}); \quad \Phi_R: \mathfrak{J}_R(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{J}_o(\mathfrak{A}) \otimes \mathfrak{J}(\mathfrak{B})$$

$$D \otimes L(b) \to D \otimes \left[R(b) - L(b) \right]; \quad R(a) \otimes D \to \left[R(a) - L(a) \right] \otimes D$$

Satz (4.5):

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}) = \left\{ A_L + A_R : A_i \in \mathfrak{J}_i(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}); \ \Phi_L(A_L) = \Phi_R(A_R) \right\}$$

Abschließend geben wir noch zwei Spezialfälle:

Korollar 1: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kommutativ, so ist

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}) = \mathfrak{J}_L(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + \mathfrak{J}_R(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

In diesem Fall ist nämlich $\mathfrak{J}_o(\mathfrak{A}) = \mathfrak{J}_o(\mathfrak{B}) = (0)$ und damit $\Phi_L = \Phi_R = 0$.

Korollar 2: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nuklear, so ist $\mathfrak{J}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})$ isomorph zur direkten Summe $\mathfrak{J}(\mathfrak{A}) \oplus \mathfrak{J}(\mathfrak{B})$.

Beweis: Wie bei Korollar 1 ist $\mathfrak{J}_o(\mathfrak{A}) = \mathfrak{J}_o(\mathfrak{B}) = (0)$; darüber hinaus ist $\mathfrak{J}_L(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ isomorph zu $\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{J}_R(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ isomorph zu $\mathfrak{J}(\mathfrak{B})$, woraus die Behauptung folgt.

B) Schwach nichtausgeartete, kommutative, potenz-assoziative Algebren.

Im zweiten Teil der Arbeit soll die Struktur der schwach nichtausgearteten, kommutativen, potenz-assoziativen Algebren näher bestimmt werden. Wir geben zunächst folgende

Definition: Eine Algebra $\mathfrak{A}$ heißt schwach nichtausgeartet, wenn es eine eigentliche assoziative nichtausgeartete Linearform auf $\mathfrak{A}$ gibt.

Definition: Eine Algebra $\mathfrak{A}$ über K heißt Jordan-Algebra, wenn

(1) im Falle Char K $\neq$ 2: $u^2(uv) = u(u^2v)$

(2) im Falle Char K = 2: $u^2(vw) = v(u^2w)$

für alle $u,v,w \in \mathfrak{A}$ gilt.

Zur Theorie der Jordan-Algebren verweisen wir wiederum auf [4]; aus diesem Buch stammen alle nicht anders gekennzeichneten Zitate.

Für die uns interessierenden Algebren gilt der

Satz: Jede kommutative, potenz-assoziative, schwach nichtausgeartete Algebra über einem Körper einer zu 10 primen Charakteristik mit wenigstens vier Elementen ist eine Jordan-Algebra.

Es handelt sich un Korollar 1 zu Satz (I;6.5).

Es bleiben die "Ausnahmefälle" Char K = 2, Char K = 5 und K = $\mathbb{Z}_3$ (Primkörper mit 3 Elementen), mit denen wir uns im folgenden beschäftigen.

I. Der Fall Charakteristik ungleich 2.

§5. Wichtige Identitäten.

Lemma (5.1): In jeder kommutativen, potenz-assoziativen schwach nichtausgearteten Algebra ("KPS-Algebra") über $\mathbb{Z}_3$ gilt:

$$(uv)^2 - u^2v^2 = u[(uv)v] - (u^2v)v \tag{5.1}$$

$$L(uv)L(u) + L(v)L(u^2) = L(u^2)L(v) + L(u)L(uv) \tag{5.2}$$

$$L(u^3) = L^3(u) \tag{5.3}$$

$$L(u^2v) = L(u^2)L(v) + L(u)L(v)L(u) - L(uv)L(u) \tag{5.4}$$

Beweis: In der Identität $u^2u^2 = u^3u$ ersetzen wir u durch $u + \varrho v$ mit $\varrho = \pm 1$ ($\varrho^2 = 1$) und erhalten:

$(u+\varrho v)^2(u+\varrho v)^2 = (u^2 - \varrho uv + v^2)(u^2 - \varrho uv + v^2) = u^2u^2 -$

$- \varrho u^2(uv) + u^2v^2 - \varrho u^2(uv) + (uv)^2 - \varrho(uv)v^2 + u^2v^2 - \varrho(uv)v^2 + v^2v^2 =$

$= u^2u^2 - u^2v^2 + (uv)^2 + v^2v^2 + \varrho[u^2(uv) + (uv)v^2]$;

$(u+\varrho v)^3(u+\varrho v) = (u^3 - \varrho u(uv) + uv^2 + \varrho u^2v - (uv)v + \varrho v^3)(u+\varrho v) =$

$= u^3u - \varrho u[u(uv)] + u(uv^2) + \varrho u(u^2v) - u[(uv)v] + \varrho uv^3 + \varrho u^3v -$

$- [u(uv)]v + \varrho(uv^2)v + (u^2v)v - \varrho[(uv)v]v + v^3v$;

durch Vergleich folgt:

$(uv)^2 - u^2v^2 + \varrho[u^2(uv) + (uv)v^2] = u(uv^2) - u[(uv)v] - [u(uv)]v +$

$+ (u^2v)v + \varrho\{-u[u(uv)] + u(u^2v) + uv^3 + u^3v + (uv^2)v - [(uv)v]v\}$.

Setzt man nun nacheinander $\varrho = +1$ und $\varrho = -1$ und addiert die entstehenden Gleichungen, so erhält man

$$(uv)^2 - u^2v^2 = u(uv^2) - u[(uv)v] - [u(uv)]v + (u^2v)v$$

Wir polarisieren weiter, indem wir v durch $v + \varrho w$ ersetzen; auf beiden Seiten bleiben dann die in ϱ linearen Glieder stehen:

$-(uv)(uw) + u^2(vw) =$

$= -u[u(vw)]-u[(uv)w]-u[(uw)v]-[u(uv)]w-[u(uw)]v+(u^2w)v+(u^2v)w.$

Als lineare Transformation in w geschrieben:

$-L(uv)L(u)+L(u^2)L(v) = -L^2(u)L(v)-L(u)L(uv)-L(u)L(v)L(u)-$
$-L(u(uv))-L(v)L^2(u)+L(v)L(u^2)+L(u^2v)$

Da die Algebra nach Voraussetzung schwach nichtausgeartet ist, ist L(u) selbstadjungiert (I;§6.4). In der vorigen Gleichung können wir nun zum Adjungierten übergehen und die neue Gleichung von der ursprünglichen subtrahieren:

$-L(uv)L(u)+L(u^2)L(v)+L(u)L(uv)-L(v)L(u^2) =$
$= -L^2(u)L(v)-L(u)L(uv)-L(u)L(v)L(u)-L(u(uv))-L(v)L^2(u)+$
$+L(v)L(u^2)+L(u^2v)+L(v)L^2(u)+L(uv)L(u)+L(u)L(v)L(u)+$
$+L(u(uv))+L^2(u)L(v)-L(u^2)L(v)-L(u^2v)$

Durch Zusammenfassen gleicher Glieder erhalten wir (5.2). Auf w angewendet, ergibt das:

$(uv)(uw) + v(u^2w) = u^2(vw) + u[(uv)w],$

und, als lineare Transformation in v geschrieben, gerade (5.4). Setzen wir in (5.4) v = u, so erhalten wir (5.3). Wenden wir dagegen (5.4) auf v an, so ergibt sich (5.1), q.e.d.

Lemma (5.2): In jeder kommutativen potenz-assoziativen Algebra über einem Körper K der Charakteristik 5 gilt:

$$2(uv)^2 + u^2v^2 = \\ = 3(u^2v)v + 3u(uv^2) + u[(uv)v] + [u(uv)]v \quad (5.5)$$

$$2L(u(uv)) + L(u^2v) + 2L^2(u)L(v) + 2L(u)L(v)L(u) + \\ + 2L(v)L^2(u) + L(v)L(u^2) + 2L(u)L(uv) + \\ + 2L(uv)L(u) + L(u^2)L(v) = 0 \quad (5.6)$$

$$L(u^3) + 2L^3(u) + L(u)L(u^2) + L(u^2)L(u) = 0 \quad (5.7)$$

Beweis: Da der Grundkörper wenigstens fünf Elemente besitzt, können wir in $(u + \varrho v)^2(u + \varrho v)^2 = (u + \varrho v)^3(u + \varrho v)$

die in ϱ, $\varrho \in K$ linearen Glieder vergleichen:

$(u+\varrho v)^2 = u^2+2\varrho uv+\ldots$

$(u+\varrho v)^2(u+\varrho v)^2 = u^2u^2+4\varrho u^2(uv)+\ldots$

$(u+\varrho v)^3 = u^3+2\varrho u(uv)+\varrho u^2v+\ldots$

$(u+\varrho v)^3(u+\varrho v) = u^3u+2\varrho u[u(uv)]+\varrho u(u^2v)+\varrho u^3v+\ldots,$

also (5.7). Durch Polarisieren ergibt sich daraus unmittelbar (5.6), und durch Anwendung von (5.6) auf v erhält man (5.5), q.e.d.

Um im folgenden die Fälle $\mathbb{Z}_3$ und Charakteristik 5 nicht immer getrennt behandeln zu müssen, vereinen wir die Ergebnisse dieses Paragraphen in

Lemma (5.3): In jeder KPS-Algebra über $\mathbb{Z}_3$ oder einem Körper der Charakteristik 5 gilt:

$$2(uv)^2+u^2v^2=3(u^2v)v-2u(uv^2)-4[u(uv)]v+6u[(uv)v] \quad (5.8)$$

$$7L(uv)L(u)+2L(u)L(uv)+L(v)L(u^2)-4L(u^2)L(v)+$$
$$+6L(u^2v)-3L(u(uv))-3L^2(u)L(v)-$$
$$-3L(u)L(v)L(u)-3L(v)L^2(u)=0 \quad (5.9)$$

$$L(u^3)+2L^3(u)+6L(u)L(u^2)+6L(u^2)L(u)=0 \quad (5.10)$$

$$7L(uv)L(w)+7L(vw)L(u)+2L(u)L(vw)+2L(w)L(uv)+$$
$$+2L(v)L(uw)+7L(uw)L(v)-3L((uw)v)-$$
$$-3L(u(vw))-3L((uv)w)-3L(u)L(w)L(v)-$$
$$-3L(w)L(u)L(v)-3L(u)L(v)L(w)-3L(w)L(v)L(u)-$$
$$-3L(v)L(w)L(u)-3L(v)L(u)L(w)=0 \quad (5.11)$$

Beweis: Im Falle $\mathbb{Z}_3$ ist (5.8) die Formel (5.1), entsprechend (5.9) die Formel (5.2) und (5.10) die Formel (5.3); im Falle der Charakteristik 5 entsprechen (5.8)-(5.10) den Formeln (5.5)-(5.7). (5.11) erhält man aus (5.9) durch Polarisieren.

§6. Peirce-Zerlegung.

Setzen wir in Lemma (5.3), Formel (5.10) für u ein Idempotent c ein, so erhalten wir $L(c) + 2L^3(c) - 3L^2(c) = 0$. Wie ein Vergleich mit Satz (I;12.2) zeigt, haben wir damit vom folgenden Satz die Teile (1),(3) und (4) schon nachgewiesen:

Satz (6.1): In jeder KPS-Algebra $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{Z}_3$ oder einem Körper der Charakteristik 5 gilt für die zu einem Idempotent $c \in \mathfrak{A}$ definierten Teilräume
$\mathfrak{A}_\nu(c) = \{u \in \mathfrak{A} : cu = \nu u\}$:
(1) Die Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0(c) + \mathfrak{A}_{1/2}(c) + \mathfrak{A}_1(c)$ ist direkt im Vektorraumsinne;
(2) $\mathfrak{A}_0(c)$ und $\mathfrak{A}_1(c)$ sind Teilalgebren von $\mathfrak{A}$, die einander bei der Multiplikation annullieren;
(3) $\mathfrak{A}_{1/2}(c)\mathfrak{A}_{1/2}(c) \subset \mathfrak{A}_0(c) + \mathfrak{A}_1(c)$;
(4) $\mathfrak{A}_\nu(c)\mathfrak{A}_{1/2}(c) \subset \mathfrak{A}_{1/2}(c) + \mathfrak{A}_{1-\nu}(c)$ für $\nu = 0,1$.

Um auch die Aussage (2) zu zeigen, müssen wir je nach Charakteristik des Grundkörpers K verschieden vorgehen. Für $K = \mathbb{Z}_3$ erhalten wir das Behauptete aus Satz (IV;5.7), da dort nur (5.4) verwendet wird. Für Char K = 5 braucht - dem Beweisgange von Satz (I;12.2) folgend - nur noch $\mathfrak{A}_0(c)\mathfrak{A}_1(c) = (0)$ bewiesen zu werden. Dazu vergleichen wir $(c + \varrho x)^4(c + \varrho x)^2$ mit $(c + \varrho x)^6$ für $x \in \mathfrak{A}_0(c) + \mathfrak{A}_1(c)$. Dabei erhalten wir ein Polynom $A_1\varrho + A_2\varrho^2 + \ldots + A_5\varrho^5 = 0$. Für $\varrho \neq 0$ ist $A_1 + A_2\varrho + \ldots + A_5\varrho^4 = 0$; setzen wir $\varrho = 1$ und $\varrho = -1$ und subtrahieren die Ergebnisse, so erhalten wir $A_2 + A_4 = 0$. Setzen wir dagegen $\varrho = 2$ und $\varrho = -2$ und subtrahieren wie-

der, so ergibt sich: $A_2 - A_4 = 0$, also $A_2 = 0$. Die in ϱ quadratischen Glieder stimmen also überein. Wegen $c(cx) = cx$ ergibt das:

$$(c+\varrho x)^2 = c+2\varrho cx+\varrho^2x^2$$

$$(c+\varrho x)^3 = c+2\varrho cx+\varrho^2cx^2+\varrho cx+2\varrho^2(cx)x+\ldots =$$
$$= c-2\varrho cx+\varrho^2cx^2+2\varrho^2(cx)x+\ldots$$

$$(c+\varrho x)^4 = c-2\varrho cx+\varrho^2c(cx^2)+2\varrho^2c[(cx)x]+\varrho cx-2\varrho^2(cx)x+\ldots =$$
$$= c-\varrho cx+\varrho^2L^2(c)x^2+2\varrho^2L(c)[(cx)x]-2\varrho^2(cx)x+\ldots$$

$$(c+\varrho x)^5 = c-\varrho cx+\varrho^2L^3(c)x^2+2\varrho^2L^2(c)[(cx)x]-2\varrho^2L(c)[(cx)x]+$$
$$+\varrho cx-\varrho^2(cx)x+\ldots =$$
$$= c+\varrho^2L^3(c)x^2+2\varrho^2L^2(c)[(cx)x]-2\varrho^2L(c)[(cx)x]-$$
$$-\varrho^2(cx)x+\ldots$$

$$(c+\varrho x)^6 = c+\varrho^2L^4(c)x+2\varrho^2L^3(c)[(cx)x]-2\varrho^2L^2(c)[(cx)x]-$$
$$-\varrho^2L(c)[(cx)x]+\varrho cx+\ldots$$

$$(c+\varrho x)^4(c+\varrho x)^2 = c-\varrho cx+\varrho^2L^3(c)x^2+2\varrho^2L^2(c)[(cx)x]-$$
$$-2\varrho^2L(c)[(cx)x]+2\varrho cx-2\varrho^2(cx)^2+\varrho^2cx^2+\ldots$$

und damit

$$L^4(c)x^2+2L^3(c)[(cx)x]-2L^2(c)[(cx)x]-L(c)[(cx)x]-L^3(c)x^2-$$
$$-2L^2(c)[(cx)x]+2L(c)[(cx)x]+2(cx)^2-cx^2 = 0.$$

In der daraus resultierenden Gleichung

$$[L^4(c)-L^3(c)-L(c)]x^2+[2L^3(c)+L^2(c)+L(c)][(cx)x]+2(cx)^2=0$$

können wir wegen $2L^3(c) + L^2(c) + L(c) = -L^2(c)$ und

$$L^4(c) - L^3(c) - L(c) = -L^3(c) + 2L^2(c) - L^3(c) - L(c) = -L^2(c)$$

schreiben

$$-L^2(c)x^2 - L^2(c)[(cx)x] + 2(cx)^2 = 0$$

Polarisation bezüglich x ergibt

$$-2L^2(c)(vw) - L^2(c)[(cv)w + (cw)v] - (cv)(cw) = 0$$

Ist nun $v \in \mathfrak{A}_0(c)$ und $w \in \mathfrak{A}_1(c)$, so wird daraus - wie unmittelbar zu sehen: $-3L^2(c)(vw) = 0$. Zusammen mit Gleichung (I;12.4") ist damit $vw = 0$ und der Satz bewiesen.

Wir benötigen nun eine Verschärfung dieser Peirce-Zerlegung und beweisen dazu einen auch an sich interessanten Satz:

Satz (6.2): Besitzt eine kommutative schwach nichtausgeartete Algebra eine Peirce-Zerlegung, so ist diese stabil, d.h. es gilt $\mathfrak{A}_{1/2}(c)\mathfrak{A}_\nu(c) \subset \mathfrak{A}_{1/2}(c)$ für $\nu = 0,1$.

Beweis: Sei $u_0 u_{1/2} = v_1 + v_{1/2}$ ($u_\nu, v_\nu \in \mathfrak{A}_\nu(c)$); λ sei die nichtausgeartete assoziative Linearform. Dann gilt:

$$\lambda(w_1 w_{1/2}) = \lambda((cw_1)w_{1/2}) = \lambda((cw_{1/2})w_1) = \frac{1}{2}\lambda(w_{1/2}w_1)$$

für alle $w_\nu \in \mathfrak{A}_\nu(c)$, und damit ist $\lambda(w_1 w_{1/2}) = 0$; daraus folgt

$$\lambda(v_1 w_1) = \lambda((u_0 u_{1/2})w_1) - \lambda(w_1 v_{1/2}) = \lambda((u_0 w_1)u_{1/2}) - \lambda(w_1 v_{1/2}) = 0.$$

Da außerdem $\lambda(v_1 w_{1/2}) = \lambda(v_1 w_0) = 0$ gilt, ist $\lambda(v_1 x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{A}$. Da λ nichtausgeartet ist, muß $v_1 = 0$ sein, d.h. $\mathfrak{A}_0(c)\mathfrak{A}_{1/2}(c) \subset \mathfrak{A}_{1/2}(c)$.

Mit $c \neq e$ ist auch $e - c$ Idempotent, und es bestehen die Beziehungen $\mathfrak{A}_1(e-c) = \mathfrak{A}_0(c)$ und $\mathfrak{A}_{1/2}(e-c) = \mathfrak{A}_{1/2}(c)$. Daraus erhält man entsprechend $\mathfrak{A}_1(c)\mathfrak{A}_{1/2}(c) \subset \mathfrak{A}_{1/2}(c)$, q.e.d.

Die Stabilität der Peirce-Zerlegung ermöglicht nun die Zerlegung nach einem System orthogonaler Idempotenter.

Lemma (6.3): In jeder kommutativen Algebra mit stabiler Peirce-Zerlegung gilt für zwei orthogonale Idempotente c_1 und c_2 ($c_1 c_2 = 0$): $L(c_1)L(c_2) = L(c_2)L(c_1)$.

Beweis: Sei $u \in \mathfrak{A}$ und $u = u_1 + u_{1/2} + u_0$ die Peirce-Zerle-

gung bezüglich c_1. Da $c_2 \in \mathfrak{A}_0(c_1)$, ist $c_2u = c_2u_{1/2} + c_2u_0$ und $c_1(c_2u) = \frac{1}{2}c_2u_{1/2}$; andererseits gilt $c_1u = u_1 + \frac{1}{2}u_{1/2}$ und $c_2(c_1u) = \frac{1}{2}c_2u_{1/2}$, q.e.d.

Wir definieren mit Hilfe der "quadratischen Darstellung" $P(x) := 2L^2(x) - L(x^2)$ lineare Transformationen für ein Orthogonalsystem Idempotenter $c_1,\ldots,c_r$ der Algebra $\mathfrak{A}$:

$$C_{kk} := P(c_k) = 2L^2(c_k) - L(c_k);\ C_{ki} := C_{ik} := 4L(c_k)L(c_i),\ k \neq i$$

Lemma (6.4): Die von Null verschiedenen C_{ki} sind orthogonale Idempotente.

Beweis: Es gilt $2L^3(c) - 3L^2(c) + L(c) = 0$ für jedes Idempotent der in Frage kommenden Algebren, wie sich aus (5.10) leicht entnehmen läßt.

$$P(c_k)L(c_k) = 2L^3(c_k) - L^2(c_k) = 2L^2(c_k) - L(c_k) = P(c_k).$$

Trivialerweise folgt daraus $C_{kk}^2 = C_{kk}$.- Im Falle einer Algebra über $\mathbb{Z}_3$ gilt (5.4); mit $u = c_k$, $v = c_i$, $k \neq i$ ergibt das $L(c_k)L(c_i) + L(c_k)L(c_i)L(c_k) = 0$ oder

$$L(c_k)L(c_i) - 2L(c_k)L(c_i)L(c_k) = 0 \qquad (*)$$

Im Falle Char K = 5 setzen wir $u = c_k$, $v = c_i$ in (5.6): $2L^2(c_k)L(c_i) + 2L(c_k)L(c_i)L(c_k) + 2L(c_i)L^2(c_k) + L(c_i)L(c_k) + L(c_k)L(c_i) = 0$; wegen der Vertauschbarkeit von $L(c_i)$ und $L(c_k)$ folgt daraus ebenfalls (*):

$$2L^2(c_k)L(c_i) = L(c_k)L(c_i). \qquad (*)$$

Multiplizieren wir das mit $8L(c_i)$, so ergibt sich $C_{ik}^2 = C_{ik}$.- Sind i,j,k paarweise verschieden, so ist $c_i(c_k + c_j) = 0$, und wir können in (*) für c_k auch $c_k + c_j$ einsetzen. Das zeigt die Richtigkeit von $L(c_i)L(c_j)L(c_k) = 0$ oder $C_{ij}C_{kl} = 0$

für paarweise verschiedenes i,j,k. Schließlich folgt aus (*) noch $P(c_k)L(c_i) = 0$ für $i \neq k$ und damit $C_{kk}C_{ij} = 0$ für $k \neq i$; q.e.d.

In den Sätzen (6.1) und (6.2) sowie in Lemma (6.4) haben wir alle die Hilfsmittel, die uns erlauben, die Überlegungen aus (VIII;§§1f.) wörtlich zu übertragen. Diese ergeben zusammengefaßt:

Satz (6.5): Jede KPS-Algebra $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{Z}_3$ oder einem Körper der Charakteristik 3 besitzt eine Peirce-Zerlegung in bezug auf jedes vollständige Orthogonalsystem Idempotenter $c_1, c_2, \ldots, c_r$; $(r \geq 2)$ d.h. für $e = c_1 + \ldots + c_r$ gilt:

$\mathfrak{A} = \sum_{i \leq j} \mathfrak{A}_{ij}$ mit $\mathfrak{A}_{ij} = C_{ij}\,\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}_0(c_k) = \sum_{i,j \neq k} \mathfrak{A}_{ij}$; $\mathfrak{A}_{1/2}(c_k) = \sum_{i \neq k} \mathfrak{A}_{ik}$; $\mathfrak{A}_1(c_k) = \mathfrak{A}_{kk}$

$\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}_{1/2}(c_i) \cap \mathfrak{A}_{1/2}(c_j)$ für $i \neq j$

$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{kl} = (0)$ für $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \varnothing$

$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ik} \subset \mathfrak{A}_{jk}$ für $j \neq k$

$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ij} \subset \mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{jj}$

Um zu einer Strukturtheorie dieser Algebren zu kommen, folgen wir im wesentlichen den Gedankengängen von (VIII). Zunächst beweisen wir einige wichtige Rechenregeln:

Lemma (6.6): Für beliebige $u,v \in \mathfrak{A}_1(c)$ und $w \in \mathfrak{A}_{1/2}(c)$ gilt:

$$(uv)w = u(vw) + v(uw)$$

Beweis: Wir verwenden Formel (5.11), wählen u,v und w wie in der Behauptung angegeben und wenden die Gleichung auf c an:

$$\tfrac{7}{2}(uv)w + 7u(vw) + u(vw) + 2(uv)w + v(uw) + 7v(uw) - \tfrac{3}{2}v(uw) -$$
$$- \tfrac{3}{2}u(vw) - \tfrac{3}{2}(uv)w - 3u(vw) - 3(uv)w - \tfrac{3}{2}u(vw) - 3(uv)w -$$

$- 3v(uw) - \frac{3}{2}v(uw) = -2(uv)w + 2u(vw) + 2v(uw) = 0,$

und daraus folgt die Behauptung.

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun die ersten fünf Vertauschungsregeln neu beweisen. Dabei und im folgenden sollen i,j,k,... stets paarweise verschieden sein; es sei $u_{ij} \in \mathfrak{a}_{ij}$; $u_i \in \mathfrak{a}_i$ usw.

1) Wir setzen $c = c_i + c_j$, $u = u_{ij}$, $v = v_{ij}$, $w = w_{ik}$:

$$u_{ij}(v_{ij}w_{ik}) + v_{ij}(u_{ij}w_{ik}) = (u_{ij}v_{ij})w_{ik} \qquad (V.1)$$

2) Wir setzen $c = c_i + c_j + c_k$, $u = u_{ij}$, $v = v_{ik}$, $w = w_{kl}$; wegen $u_{ij}w_{kl} = 0$ folgt:

$$u_{ij}(v_{ik}w_{kl}) = (u_{ij}v_{ik})w_{kl} \qquad (V.2)$$

3) Wir setzen $c = c_i + c_j$, $u = u_{ij}$, $v = x_i$, $w = w_{ik}$; wegen $u_{ij}w_{ik} \in \mathfrak{a}_{jk}$ folgt $x_i(u_{ij}w_{ik}) = 0$:

$$u_{ij}(x_iw_{ik}) = (u_{ij}x_i)w_{ik} \qquad (V.3)$$

4) Wir setzen $c = c_i + c_j$, $u = u_{ij}$, $v = x_j$, $w = w_{ik}$; wegen $x_jw_{ik} = 0$ folgt:

$$x_j(u_{ij}w_{ik}) = (u_{ij}x_j)w_{ik} \qquad (V.4)$$

5) Wir setzen $c = c_i$, $u = x_i$, $v = y_i$, $w = u_{ij}$:

$$x_i(y_iu_{ij}) + y_i(x_iu_{ij}) = (x_iy_i)u_{ij} \qquad (V.5)$$

Der Beweis der sechsten Vertauschungsregel ist komplizierter. In (5.11) setzen wir $u = c_i$, $v = v_{ij}$, $w = x_i$ und wenden sie auf v_{ij} an:

$$\frac{7}{2}v_{ij}(v_{ij}x_i) + \frac{7}{2}v_{ij}(v_{ij}x_i) + 2c_i\left[v_{ij}(v_{ij}x_i)\right] + v_{ij}^2x_i +$$
$$+ 2v_{ij}(v_{ij}x_i) + 7v_{ij}^2x_i - 3v_{ij}(v_{ij}x_i) - \frac{3}{2}v_{ij}(v_{ij}x_i) -$$
$$- \frac{3}{2}v_{ij}(v_{ij}x_i) - 3v_{ij}^2x_i - 3x_i\left[c_iv_{ij}^2\right] - 3c_i\left[v_{ij}(v_{ij}x_i)\right] -$$

$$- \tfrac{3}{2}v_{ij}^2 x_i - \tfrac{3}{2}v_{ij}(v_{ij}x_i) - \tfrac{3}{2}v_{ij}(v_{ij}x_i) =$$

$$= -c_i\left[v_{ij}(v_{ij}x_i)\right] + \tfrac{1}{2}v_{ij}^2 x_i = 0.$$

Dafür können wir auch schreiben: $c_i\left[2v_{ij}(v_{ij}x_i) - v_{ij}^2 x_i\right] = 0.$

Durch Polarisation wird daraus:

$$c_i\left[v_{ij}(u_{ij}x_i) + u_{ij}(v_{ij}x_i) - (u_{ij}v_{ij})x_i\right] = 0$$

und wegen $(u_{ij}v_{ij})x_i \in \mathfrak{A}_{ii}$:

$$P(c_i)\left[u_{ij}(v_{ij}x_i) + v_{ij}(u_{ij}x_i)\right] = (u_{ij}v_{ij})x_i \qquad (V.6)$$

Das Zwischenergebnis

$$c_i\left[2v_{ij}(v_{ij}x_i) - v_{ij}^2 x_i\right] = L(c_i)P(v_{ij})x_i = 0$$

formulieren wir als

<u>Lemma (6.7):</u> $P(v_{ij})\colon \mathfrak{A}_{ii} \longrightarrow \mathfrak{A}_{jj}$

Im Falle $c_1 = c$, $c_2 = e - c$ schreibt sich (V.6) als

$$P(c)\left[u_{\frac{1}{2}}(v_{\frac{1}{2}}x_1) + v_{\frac{1}{2}}(u_{\frac{1}{2}}x_1)\right] = (u_{\frac{1}{2}}v_{\frac{1}{2}})x_1 \qquad (V.6')$$

§7. Definition der Regularität; einfache Eigenschaften.

Definition: $\mathfrak{A}$ heißt regulär bezüglich $c_1, \ldots, c_r$, wenn es Elemente $e_{1i} \in \mathfrak{A}_{1i}$ mit der Eigenschaft

$$e_{1i}^2 = 4(c_1 + c_i)$$

gibt.

Für diesen und den nächsten Paragraphen wollen wir die Regularität unserer Algebren voraussetzen.

Lemma (7.1): Es gibt Elemente $e_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$ mit

$$e_{ij}^2 = 4(c_i + c_j);\ e_{ij}e_{jk} = e_{ik} \tag{7.1}$$

$$e_{ij}(e_{ij}w_{ik}) = w_{ik} \tag{7.2}$$

$$e_{ij}(e_{ik}w_{kl}) = e_{jk}w_{kl}$$

Beweis: In Formel (5.8) setzen wir $u = e_{1i}$, $v = e_{1j}$:

$$2(e_{1i}e_{1j})^2 + e_{1i}^2e_{1j}^2 = 3(e_{1i}^2e_{1j})e_{1j} - 2e_{1i}(e_{1i}e_{1j}^2) -$$
$$- 4[e_{1i}(e_{1i}e_{1j})]e_{1j} + 6e_{1i}[(e_{1i}e_{1j})e_{1j}] =$$
$$= 3(e_{1i}^2e_{1j})e_{1j} - 2e_{1i}(e_{1i}e_{1j}^2) - 2(e_{1i}^2e_{1j})e_{1j} + 3e_{1i}(e_{1i}e_{1j}^2) =$$
$$= 4[(c_1 + c_i)e_{1j}]e_{1j} + 4e_{1i}[e_{1i}(c_1 + c_j)] = 2e_{1j}^2 + 2e_{1i}^2$$

nach (V.1).- Definieren wir

$$e_{ij} := e_{1i}e_{1j},$$

so folgt $2e_{ij}^2 + 16(c_1 + c_i)(c_1 + c_j) = 8(c_1 + c_j) + 8(c_1 + c_i)$ und daraus die erste Gleichung von (7.1). Die übrigen Aussagen ergeben sich wie beim Beweis von Lemma (VIII;4.2).

Definition: $P_{ij} := P_{ji} := \frac{1}{4}P(e_{ij})$; $\quad L_{ij} := L_{ji} := L(e_{ij})$

Lemma (7.2): (1) Die Einschränkung von P_{ij}^2 auf die Unteralgebra $\mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{ij} + \mathfrak{A}_{jj}$ ist die Identität.

(2) Die Abbildung P_{ij}: $\mathfrak{A}_{ii} \longrightarrow \mathfrak{A}_{jj}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: (1) Wir verwenden (5.10) für $u = e_{ij}$. Dann ist $u^2 = 4(c_i + c_j)$ und $u^3 = 4e_{ij}$, d.h.

$$4L_{ij} + 2L_{ij}^3 + 48L_{ij}^2 = 0,$$

da auf $\mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{ij} + \mathfrak{A}_{jj}$ die Abbildung $L(c_i + c_j)$ die Identität ist. Also ist $L_{ij}^3 = -26L_{ij}$ und $L_{ij}^4 = -26L_{ij}^2$; auf der anderen Seite gilt

$$P_{ij}^2 = \frac{1}{16}(2L_{ij}^2 - 4\mathrm{Id})^2 = 4L_{ij}^4 - L_{ij}^2 + \mathrm{Id} = \mathrm{Id},$$

wenn wir beachten, daß die Charakteristik die Zahl 15 teilt. (2) Aus Lemma (6.7) wissen wir, daß P_{ij} tatsächlich eine Abbildung der betreffenden Teilalgebren ist, und aus dem eben Gezeigten folgt die Bijektivität von P_{ij}. Zu zeigen bleibt also noch $(P_{ij}v_j)^2 = P_{ij}(v_j^2)$, woraus die Behauptung durch Polarisieren folgt. In (5.8) setzen wir $u = v_j$, $v = e_{ij}$:

$$2(e_{ij}v_j)^2 + e_{ij}^2v_j^2 =$$
$$= 3e_{ij}(e_{ij}v_j^2) - 2(e_{ij}^2v_j)v_j - 4e_{ij}\left[(e_{ij}v_j)v_j\right] + 6\left[(e_{ij}v_j)e_{ij}\right]v_j.$$

Wir vereinfachen das mit Hilfe von

$$2v_j(v_je_{ij}) = v_j^2e_{ij}, \tag{7.3}$$

was aus (V.5) folgt, und

$$P(c_j)\left[(e_{ij}v_j)^2\right] + v_j^2 = \left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right]v_j,$$

was aus (7.3) und den aus (V.6) abgeleiteten Gleichungen

$$P(c_j)\left[e_{ij}\left\{(e_{ij}v_j)v_j\right\} + (e_{ij}v_j)^2\right] = \left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right]v_j$$
$$P(c_j)\left[e_{ij}(e_{ij}v_j^2)\right] = \frac{1}{2}e_{ij}^2v_j^2 = 2v_j^2 \tag{7.4}$$

folgt, zu

$$2(e_{ij}v_j)^2 = -6v_j^2 + e_{ij}(e_{ij}v_j^2) + 6P(c_j)\left[(e_{ij}v_j)^2\right]$$

Nun wenden wir auf beide Seiten $P(c_j)$ an und beachten die Idempotenz von $P(c_j)$ - aus (5.10) sofort nachzurechnen - :

$$2P(c_j)\left[(e_{ij}v_j)^2\right] = -6v_j^2 + P(c_j)\left[e_{ij}(e_{ij}v_j^2)\right] + 6P(c_j)\left[(e_{ij}v_j)^2\right] =$$
$$= -4v_j^2 + 6P(c_j)\left[(e_{ij}v_j)^2\right]$$

unter nochmaliger Verwendung von (7.4). Insgesamt haben wir also bewiesen:

$$\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right]v_j = 2v_j^2 \tag{7.5}$$

$$(e_{ij}v_j)^2 = \tfrac{1}{2}e_{ij}(e_{ij}v_j^2) \tag{7.6}$$

Als nächstes setzen wir in (5.9) $u = e_{ij}$, $v = v_j$ und wenden die Formel auf $e_{ij}v_j$ an:

$$7(e_{ij}v_j)\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right] + 2e_{ij}(e_{ij}v_j)^2 + v_j\left[e_{ij}^2(e_{ij}v_j)\right] -$$
$$- 4e_{ij}^2\left[v_j(e_{ij}v_j)\right] + 6(e_{ij}^2v_j)(e_{ij}v_j) - 3\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right](e_{ij}v_j) -$$
$$- 3e_{ij}\left\{e_{ij}\left[v_j(e_{ij}v_j)\right]\right\} - 3e_{ij}\left\{v_j\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right]\right\} -$$
$$- 3v_j\left\{e_{ij}\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right]\right\} = 4(e_{ij}v_j)\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right] + 2e_{ij}(e_{ij}v_j)^2 +$$
$$+ 12(e_{ij}v_j)v_j - 3e_{ij}\left\{e_{ij}\left[v_j(e_{ij}v_j)\right]\right\} -$$
$$- 3e_{ij}\left\{v_j\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right]\right\} - 3v_j\left\{e_{ij}\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right]\right\} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von $L_{ij}^3 = -26L_{ij}$ sowie von (7.3), (7.5) und (7.6) wird daraus $4(e_{ij}v_j)\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right] - 26e_{ij}v_j^2 +$
$+ 12(e_{ij}v_j)v_j + 39e_{ij}v_j^2 - 6e_{ij}v_j^2 + 78(e_{ij}v_j)v_j = 0$, d.h.

$$(e_{ij}v_j)\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right] = -\tfrac{7}{4}e_{ij}v_j^2 \tag{7.7}$$

Schließlich setzen wir in (5.8) $u = e_{ij}v_j$, $v = e_{ij}$:

$$2\left[e_{ij}(e_{ij}v_j)\right]^2 + e_{ij}^2(e_{ij}v_j)^2 =$$
$$= 3\left[(e_{ij}v_j)^2e_{ij}\right]e_{ij} - 2(e_{ij}v_j)\left[(e_{ij}v_j)e_{ij}^2\right] -$$
$$- 4\left\{(e_{ij}v_j)\left[(e_{ij}v_j)e_{ij}\right]\right\}e_{ij} + 6(e_{ij}v_j)\left\{\left[(e_{ij}v_j)e_{ij}\right]e_{ij}\right\}$$

oder unter Verwendung von (7.6), (7.7) und $L_{ij}^3 = -26L_{ij}$:

$2[e_{ij}(e_{ij}v_j)]^2 = -2e_{ij}(e_{ij}v_j^2) - 39e_{ij}(e_{ij}v_j^2) - 4e_{ij}(e_{ij}v_j^2) +$

$+ 7e_{ij}(e_{ij}v_j^2) - 78e_{ij}(e_{ij}v_j^2) = -116e_{ij}(e_{ij}v_j^2)$

oder: $[e_{ij}(e_{ij}v_j)]^2 = -58e_{ij}(e_{ij}v_j^2)$.- Nun ist

$(P_{ij}v_j)^2 = \frac{1}{16}[2e_{ij}(e_{ij}v_j) - e_{ij}^2v_j]^2 =$

$= \frac{1}{16}[4\{e_{ij}(e_{ij}v_j)\}^2 - 4\cdot 4\{e_{ij}(e_{ij}v_j)\}v_j + 4^2v_j^2] =$

$= -\frac{58}{4}e_{ij}(e_{ij}v_j^2) - 2v_j^2 + v_j^2 = \frac{1}{4}[2e_{ij}(e_{ij}v_j^2) - 4v_j^2] =$

$= P_{ij}(v_j^2)$, q.e.d.

<u>Definition:</u> $S_{ij} := \frac{1}{4}L(c_i)L_{ij}$

Für den Rest dieses Paragraphen seien alle Abbildungen nur auf der Unteralgebra $\mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{ij} + \mathfrak{A}_{jj}$ untersucht.- Aus Satz (6.5) folgt:

$$S_{ij}\mathfrak{A}_{ii} \subset \mathfrak{A}_{ij};\ S_{ij}\mathfrak{A}_{ij} \subset \mathfrak{A}_{ii};\ S_{ij}\mathfrak{A}_{jj} \subset \mathfrak{A}_{ij} \qquad (7.8)$$

Speziell gilt $S_{ij}c_i = \frac{1}{16}e_{ij}$; $S_{ij}e_{ij} = c_i$; $S_{ij}c_j = \frac{1}{16}e_{ij}$.
Aus der Definition von P_{ij} folgt

$$P_{ij} = \frac{1}{2}L_{ij}^2 - \mathrm{Id} \qquad (7.9)$$

Aus dem Beweis von Lemma (7.2) wissen wir, daß

$$L_{ij}^3 = -26L_{ij} = 4L_{ij} \qquad (7.10)$$

gilt. Aus (7.9) und (7.10) folgt

$$P_{ij}L_{ij} = L_{ij}P_{ij} = L_{ij} \qquad (1)$$

In (5.9) setzen wir nun $u = e_{ij}$, $v = c_i$:

$\frac{7}{2}L_{ij}^2 + L_{ij}^2 + 4L(c_i) - 16L(c_i) + 24L(c_i) - 6\mathrm{Id} - 3L_{ij}^2L(c_i) -$

$- 3L_{ij}L(c_i)L_{ij} - 3L(c_i)L_{ij}^2 = 0$

Auf ein $w_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$ angewandt, ist das

$\frac{9}{2}L_{ij}^2w_{ij} + 6w_{ij} - 6w_{ij} - \frac{3}{2}L_{ij}^2w_{ij} - 3L_{ij}L(c_i)L_{ij}w_{ij} - \frac{3}{2}L_{ij}^2w_{ij} = 0$

Auf $\mathfrak{A}_{ij}$ stimmen also L_{ij}^2 und $2L_{ij}L(c_i)L_{ij}$ überein, falls Char K = 5. Auf $\mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{jj}$ ist diese Aussage trivialerweise auch richtig, und für K = $\mathbb{Z}_3$ folgt sie, indem wir in (5.4) $u = e_{ij}$ und $v = c_i$ setzen. Stets gilt also

$$L_{ij}^2 = 8L_{ij}S_{ij} = 8L_{ij}S_{ji} \qquad (2)$$

Aus (7.9) wird damit

$$P_{ij} = 4L_{ij}S_{ij} - Id \qquad (3)$$

Multiplizieren wir (1) von links mit $\frac{1}{4}L(c_i)$, so erhalten wir

$$S_{ij}P_{ij} = S_{ij} \qquad (4)$$

(2) ergibt $S_{ij}L_{ij} = \frac{1}{4}L(c_i)L_{ij} = 2L(c_i)L_{ij}S_{ij}$. Vertauscht man i und j und addiert, so erhält man (wieder nach (2))

$$S_{ij}L_{ij} + S_{ji}L_{ij} = 2L_{ij}S_{ij} \qquad (5)$$

Für $u_i \in \mathfrak{A}_{ii}$ folgt aus (5) und (3)

$$S_{ij}L_{ij}u_i + S_{ji}L_{ij}u_i = 2L_{ij}S_{ij}u_i = \tfrac{1}{2}u_i + \tfrac{1}{2}P_{ij}u_i$$

Dabei liegen die ersten Summanden jeweils in $\mathfrak{A}_{ii}$ nach (7.8), die zweiten in $\mathfrak{A}_{jj}$ nach (7.8) und Lemma (6.7):

$$2S_{ij}L_{ij}u_i = u_i \qquad (5a) \qquad 2S_{ji}L_{ij}u_i = P_{ij}u_i \qquad (5b)$$

Aus (7.9), (2) und (7.10) erhält man schließlich

$$P_{ij}S_{ji} = \tfrac{1}{2}L_{ij}^2S_{ji} - S_{ji} = \tfrac{1}{16}L_{ij}^3 - S_{ji} = \tfrac{1}{4}L_{ij} - S_{ji} =$$
$$= \tfrac{1}{4}(L_{ij} - L(c_i)L_{ij}) = \tfrac{1}{4}L(c_i)L_{ij}:$$

$$P_{ij}S_{ji} = S_{ij} \qquad (6)$$

§8. Die Algebren $\mathfrak{A}^{ij}$ und $\mathfrak{L}^{ij}$; Isomorphiesätze.

Wir definieren eine kommutative Algebra $\mathfrak{A}^{ij}$ mit Einselement e_{ij}, indem wir in $\mathfrak{A}_{ij}$ ein neues Produkt festlegen:

$$u_{ij} \perp v_{ij} := \frac{1}{4}\left[(u_{ij}e_{ij})v_{ij} + (v_{ij}e_{ij})u_{ij} - (u_{ij}v_{ij})e_{ij}\right]$$

Außerdem schreiben wir für $w \in \mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{ij} + \mathfrak{A}_{jj}$ zur Abkürzung $\overline{w} = P_{ij}w$. Aus Lemma (6.7) wissen wir, daß die Abbildung $w \longrightarrow \overline{w}$ $\mathfrak{A}_{ii}$ und $\mathfrak{A}_{jj}$ vertauscht; außerdem ist $\overline{e_{ij}} = e_{ij}$, $\overline{\overline{w}} = w$ (nach Lemma (7.2)) und $\overline{u_i v_i} = \overline{u_i} \cdot \overline{v_i}$ (ebenfalls nach Lemma (7.2)). Aus (3) erhalten wir

$$\overline{w} = 4L_{ij}S_{ij}w - w = 4(S_{ij}w)e_{ij} - w \qquad (3')$$

Lemma (8.1): Für $w \in \mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{ij} + \mathfrak{A}_{jj}$ gilt:

(1) $w = \overline{w}$ genau dann, wenn $w = u_i + v_i e_{ij} + \overline{u_i}$ erfüllt ist.

(2) $e_{ij}\overline{w} = e_{ij}w$

Beweis: (1) Nach (1) bleiben die Elemente w der angegebenen Form unter der Abbildung $w \longrightarrow \overline{w}$ fest.- Ist umgekehrt $w = u_i + u_{ij} + u_j = \overline{w}$, dann folgt $P_{ij}u_i = u_j$, $P_{ij}u_j = u_i$, $P_{ij}u_{ij} = \overline{u_{ij}} = u_{ij}$ oder $u_{ij} = \overline{u_{ij}} = 4(S_{ij}u_{ij})e_{ij} - u_{ij}$ nach (3'). (7.8) zeigt dann, daß $u_{ij} = 2(S_{ij}u_{ij})e_{ij}$ die verlangte Form hat.

(2) $e_{ij}\overline{w} = L_{ij}P_{ij}w = L_{ij}w = e_{ij}w$ nach (1), q.e.d.

Wir berechnen nun unter Verwendung von (7.6), (7.7) und (7.10)

$$v_i e_{ij} \perp v_i e_{ij} = \frac{1}{4}\left\{2\left[(v_i e_{ij})e_{ij}\right](v_i e_{ij}) - (v_i e_{ij})^2 e_{ij}\right\} =$$

$$= -\frac{7}{8}e_{ij}v_i^2 - \frac{1}{8}e_{ij}\left[e_{ij}(e_{ij}v_i^2)\right] = -\frac{11}{8}e_{ij}v_i^2 = 8e_{ij}v_i^2$$

und erhalten nach Polarisation

$$u_i e_{ij} \perp v_i e_{ij} = 8(u_i v_i) e_{ij} \qquad (8.1)$$

Definition: $\mathfrak{y}(\mathfrak{A}^{ij}) := \{u_{ij} \in \mathfrak{A}^{ij} : \overline{u_{ij}} = u_{ij}\} = L_{ij}\mathfrak{A}_{ii}$

Die behauptete Gleichheit gilt nach Lemma (8.1). Nach (8.1) ist $\mathfrak{y}(\mathfrak{A}^{ij})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}^{ij}$; außerdem gilt

Lemma (8.2): (1) Die Abbildung $S_{ij}: \mathfrak{A}_{ij} \longrightarrow \mathfrak{A}_{ii}$ ist surjektiv.

(2) Die Abbildung $S_{ij}: \mathfrak{y}(\mathfrak{A}^{ij}) \longrightarrow \mathfrak{A}_{ii}$ ist ein Isomorphismus der betreffenden Algebren.

Beweis: (1) aus (5a).

(2) Wegen (8.1) und (5a) gilt

$$S_{ij}(u_i e_{ij} \perp v_i e_{ij}) = 8 S_{ij} L_{ij}(u_i v_i) = 4 u_i v_i =$$

$$= 16(S_{ij}L_{ij}u_i)\cdot(S_{ij}L_{ij}v_i) = S_{ij}(u_i e_{ij})\cdot S_{ij}(v_i e_{ij}), \text{ q.e.d.}$$

Wir nehmen von nun an $r \geqslant 3$ an und können genau wie in (VIII;§6) die Theorie der Algebren $\mathfrak{k}^{ij}$ entwickeln. Wir überzeugen uns leicht, daß dafür die bisher bereitgestellten Formeln und Sätze genügen bis einschließlich des Beweises von Lemma (VIII;6.2). Für die Formeln

$$S_{jk}L_{ik} = S_{ji} \text{ auf } \mathfrak{A}_{ij} \qquad (8a)$$

$$S_{kj}L_{ik} = P_{ki}S_{ij} \text{ auf } \mathfrak{A}_{ij} \qquad (8b)$$

geben wir folgenden neuen Beweis: In (5.8) setzen wir dazu $u = e_{ij}$, $v = v_{jk}$:

$$2(e_{ij}v_{jk})^2 + e_{ij}^2 v_{jk}^2 = 3(e_{ij}^2 v_{jk})v_{jk} - 2e_{ij}(e_{ij}v_{jk}^2) -$$

$$- 4\left[e_{ij}(e_{ij}v_{jk})\right]v_{jk} + 6e_{ij}\left[(e_{ij}v_{jk})v_{jk}\right] \qquad (8.2)$$

Multiplikation mit c_i ergibt:

$$2c_i(e_{ij}v_{jk})^2 = -2c_i\left[e_{ij}(e_{ij}v_{jk}^2)\right] + 6c_i\left\{e_{ij}\left[(e_{ij}v_{jk})v_{jk}\right]\right\} =$$

$= -2c_i[e_{ij}(e_{ij}v_{jk}^2)] + 3c_i[e_{ij}(e_{ij}v_{jk}^2)] = c_i[e_{ij}(e_{ij}v_{jk}^2)]$

nach (V.1). Setzen wir $v_{jk}^2 = v_j + v_k$, so können wir mit Hilfe von Lemma (6.7) die rechte Seite umformen:

$c_i[e_{ij}(e_{ij}v_{jk}^2)] = \frac{1}{2}c_i[P(e_{ij})(v_j + v_k) + e_{ij}^2(v_j + v_k)] =$

$= \frac{1}{2}P(e_{ij})(v_j + v_k),$

und es wird $c_i(e_{ij}v_{jk})^2 = P_{ij}(v_{jk}^2)$.- Schreibt man $e_{jk} + v_{jk}$ für v_{jk} und vergleicht die in v_{jk} linearen Glieder, so erhält man $c_i[(e_{ij}e_{jk})(e_{ij}v_{jk})] = P_{ij}(e_{jk}v_{jk})$ und mit (7.1) $c_i[e_{ik}(e_{ij}v_{jk})] = P_{ij}(e_{jk}v_{jk})$.- Die Einsetzung $v_{jk} = e_{ij}w_{ik}$ liefert wegen (7.2): $c_i(e_{ik}w_{ik}) = P_{ij}(e_{jk}(e_{ij}w_{ik}))$ oder

$S_{ik}w_{ik} = \frac{1}{4}P_{ij}L_{jk}L_{ij}w_{ik} = \frac{1}{4}P_{ij}L(c_j)L_{jk}L_{ij}w_{ik} = P_{ij}S_{jk}L_{ij}w_{ik}$

Die Anwendung von P_{ij} auf beide Seiten ergibt

$P_{ij}S_{ik}w_{ik} = P_{ij}^2S_{jk}L_{ij}w_{ik} = S_{jk}L_{ij}w_{ik}$

nach (7.8) und Lemma (7.2); daraus folgt (8b).- P_{jk} darauf angewendet, liefert mit (VIII;(7)):

$P_{jk}S_{kj}L_{ik} = P_{jk}P_{ki}S_{ij} = P_{ij}S_{ij}$

und mit (VIII;(6)) $S_{jk}L_{ik} = S_{ji}$, d.h. (8a).

Diese Hilfsmittel genügen, um genau wie in (VIII;§6) weiterzuschließen bis einschließlich Formel (6.5). Einen neuen Beweis geben wir für folgendes Lemma:

Lemma (8.3): Für $u,v \in \mathfrak{L}^{ij}$ gilt: $S_{ij}(u\cdot v) = \frac{1}{4}c_i(\bar{u}v)$.

Beweis: Wegen (8a), Lemma (VIII;6.3), (VIII;6.5) und (7.2) ist zunächst

$S_{ij}(u\cdot v) = S_{ik}L_{jk}(u\cdot v) = S_{ik}(L_{jk}u\cdot L_{jk}v) =$

$= S_{ik}([e_{ji}(e_{jk}u)][e_{jk}(e_{jk}v)]) = S_{ik}((e_{ik}\bar{u})v)$

In (5.9) setzen wir $u = e_{ik}$ und wenden die Formel auf $\bar{u}$ an:

$$7(e_{ik}v)(e_{ik}\bar{u}) + 2e_{ik}\left[(e_{ik}v)\bar{u}\right] + v(e_{ik}^2\bar{u}) - 4e_{ik}^2(v\bar{u}) +$$
$$+ 6(e_{ik}^2v)\bar{u} - 3\left[e_{ik}(e_{ik}v)\right]\bar{u} - 3e_{ik}\left[e_{ik}(v\bar{u})\right] -$$
$$- 3e_{ik}\left[v(e_{ik}\bar{u})\right] - 3v\left[e_{ik}(e_{ik}\bar{u})\right] = 0$$

Nach Multiplikation mit c_i und Verwendung von (7.2) ergibt sich:

$$2c_i\left\{e_{ik}\left[(e_{ik}v)\bar{u}\right]\right\} + 2c_i(\bar{u}v) - 16c_i(\bar{u}v) + 12c_i(\bar{u}v) - 3c_i(\bar{u}v) -$$
$$- 3c_i\left\{e_{ik}\left[e_{ik}(\bar{u}v)\right]\right\} - 3c_i\left\{e_{ik}\left[(e_{ik}\bar{u})v\right]\right\} - 3c_i(\bar{u}v) = 0.$$

Mit Hilfe von (V.1) vereinfacht sich das zu:

$$-8c_i(\bar{u}v) - 5c_i\left\{e_{ik}\left[(e_{ik}\bar{u})v\right]\right\} - c_i\left\{e_{ik}\left[e_{ik}(\bar{u}v)\right]\right\} = 0 \quad \text{oder}$$
$$S_{ik}(e_{ik}(\bar{u}v)) = -2c_i(\bar{u}v) - \tfrac{5}{4}c_i\left\{e_{ik}\left[(e_{ik}\bar{u})v\right]\right\}.$$

Nun ist

$$S_{ij}(u\cdot v) = \tfrac{1}{2}S_{ij}(u\cdot v) + S_{ij}(\overline{\bar{v}\cdot\bar{u}}) = \tfrac{1}{2}S_{ij}(u\cdot v) + \tfrac{1}{2}S_{ij}(\bar{v}\cdot\bar{u}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}S_{ik}((e_{ik}\bar{u})v) + \tfrac{1}{2}S_{ik}((e_{ik}v)\bar{u}) = \tfrac{1}{2}S_{ik}(e_{ik}(\bar{u}v)) =$$
$$= -c_i(\bar{u}v) - \tfrac{5}{8}c_i\left\{e_{ik}\left[(e_{ik}\bar{u})v\right]\right\}$$

unter Anwendung von (4) und (V.1). Für Char K = 5 ist das Lemma damit bewiesen; für $K = \mathbb{Z}_3$ ist nach (5.2)

$$e_{ik}\left[(e_{ik}\bar{u})v\right] = (e_{ik}\bar{u})(e_{ik}v) + \bar{u}(e_{ik}^2v) - e_{ik}^2(\bar{u}v) =$$
$$= (e_{ik}\bar{u})(e_{ik}v) - \bar{u}v - c_i(\bar{u}v)$$

und damit

$$-c_i(\bar{u}v) - \tfrac{5}{8}c_i\left\{e_{ik}\left[(e_{ik}\bar{u})v\right]\right\} = -c_i(\bar{u}v) - \tfrac{5}{8}c_i(\bar{u}v) = \tfrac{1}{4}c_i(\bar{u}v), \text{q.e.d.}$$

<u>Lemma (8.4):</u> Für $u \in \mathcal{K}^{ij}$ gilt

$$u\cdot u = 4(S_{ji}u)u - \tfrac{1}{2}(c_iu^2)e_{ij} = u \perp u;$$

insbesondere ist daher $\mathcal{Q}^{ij}$ isomorph zu $(\mathcal{K}^{ij})^+$.

Beweis: (1) Wegen $\overline{\bar{u}\cdot u} = \bar{u}\cdot u$ ist nach Lemma (8.1)

$$\bar{u}\cdot u = v_i e_{ij}.$$

(5a) zeigt, daß $v_i = 2S_{ij}L_{ij}v_i = 2S_{ij}(\bar{u}\cdot u)$, nach Lemma (8.3) also $\bar{u}\cdot u = 2S_{ij}(\bar{u}\cdot u)e_{ij} = \frac{1}{2}(c_i u^2)e_{ij}$ ist; und (3') gibt für $\bar{u}$ die Gleichung $\bar{u} = 4(S_{ij}u)e_{ij} - u$ und damit

$$\bar{u}\cdot u = 4\left[(S_{ij}u)e_{ij}\right]\cdot u - u\cdot u$$

Beides zusammen liefert mit Hilfe von Lemma (VIII;6.1) und (6) die Beziehung

$$u\cdot u = 4\left[(S_{ij}u)e_{ij}\right]\cdot u - \tfrac{1}{2}(c_i u^2)e_{ij} = 4(\overline{S_{ij}u})u - \tfrac{1}{2}(c_i u^2)e_{ij} =$$

$$= 4(P_{ij}S_{ij}u)u - \tfrac{1}{2}(c_i u^2)e_{ij} = 4(S_{ji}u)u - \tfrac{1}{2}(c_i u^2)e_{ij}.$$

(2) Es ist $(e_{ik}u)e_{jk} + (e_{jk}u)e_{ik} - (e_{ik}e_{jk})u \in \mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{jj} + \mathfrak{A}_{kk}$, also

$$u\left[(e_{ik}u)e_{jk} + (e_{jk}u)e_{ik} - (e_{ik}e_{jk})u\right] =$$

$$= u\left\{(c_i + c_j)\left[(e_{ik}u)e_{jk} + (e_{jk}u)e_{ik} - e_{ij}u)\right]\right\} =$$

$$= u\left\{c_i\left[e_{ik}(e_{jk}u)\right] - c_i(e_{ij}u) + c_j\left[e_{jk}(e_{ik}u)\right] - c_j(e_{ij}u)\right\} =$$

$$= u(4S_{ik}L_{jk}u + 4S_{jk}L_{ik}u - e_{ij}u) \overset{(5a)}{=} u(4S_{ij}u + 4S_{ji}u - e_{ij}u) = 0.$$

Daraus erhalten wir unter zweimaliger Verwendung von (V.1)

$$u(ue_{ij}) = u\left[(e_{ik}u)e_{jk}\right] + u\left[(e_{jk}u)e_{ik}\right] = (ue_{jk})(ue_{ik}) +$$

$$+ \left[u(e_{ik}u)\right]e_{jk} + (ue_{ik})(ue_{jk}) + \left[u(e_{jk}u)\right]e_{ik} =$$

$$= 2u\cdot u + \tfrac{1}{2}(u^2 e_{ik})e_{jk} + \tfrac{1}{2}(u^2 e_{jk})e_{ik}.$$

Setzt man $u^2 = v_i + v_j$, so folgt mit (V.4):

$$u(ue_{ij}) = 2u\cdot u + \tfrac{1}{2}(v_i e_{ik})e_{jk} + \tfrac{1}{2}(v_j e_{jk})e_{ik} =$$

$$= 2u\cdot u + \tfrac{1}{2}v_i(e_{ik}e_{jk}) + \tfrac{1}{2}v_j(e_{jk}e_{ik}) =$$

$$= 2u\cdot u + \tfrac{1}{2}(v_i + v_j)e_{ij} = 2u\cdot u + \tfrac{1}{2}u^2 e_{ij}$$

und daraus

$$u\cdot u = \tfrac{1}{2}\left[u(ue_{ij}) - \tfrac{1}{2}u^2 e_{ij}\right] = \tfrac{1}{4}\left[(ue_{ij})u + (ue_{ij})u - (uu)e_{ij}\right] =$$

$= u \perp u$, q.e.d.

Insbesondere ist also $u\cdot v + v\cdot u = 2u \perp v$, d.h. $\mathfrak{A}^{ij} \cong (\mathfrak{L}^{ij})^+$.

Lemma (8.5): Die Algebren $\mathfrak{L}^{ij}$ sind assoziativ, falls $r \geq 4$, und wenigstens alternativ für $r = 3$.

Beweis: Wir können den Beweis zu Lemma (VIII;6.8) wörtlich übernehmen und müssen lediglich die Gleichung $c_2(e_{13}x)^2 = c_2x^2$ neu beweisen, die im dort beschriebenen Beweisgang vorkommt. Wir zeigen allgemeiner: $c_k(e_{ij}v_{jk})^2 = c_kv_{jk}^2$. Dazu multiplizieren wir (8.2) mit c_k:

$$2c_k(e_{ij}v_{jk})^2 - 3c_k\left[(e_{ij}^2v_{jk})v_{jk}\right] + 4c_k\left\{v_{jk}\left[e_{ij}(e_{ij}v_{jk})\right]\right\} = 0,$$

nutzen (V.1) aus:

$$2c_k(e_{ij}v_{jk})^2 - c_k\left[(e_{ij}^2v_{jk})v_{jk}\right] = 0$$

und erhalten wie behauptet

$$c_k(e_{ij}v_{jk})^2 = \tfrac{1}{2}c_k\left[(e_{ij}^2v_{jk})v_{jk}\right] = 2c_k\left[\left\{(c_i + c_j)v_{jk}\right\}v_{jk}\right] = c_kv_{jk}^2.$$

Korollar: Die Algebren $\mathfrak{A}^{ij}$ und $\mathfrak{A}_{ii}$ sind Jordan-Algebren.

Beweis: Nach Satz (VII;2.7) ist $(\mathfrak{L}^{ij})^+$ stets eine Jordan-Algebra. Die Behauptung folgt dann aus den Lemmata (8.2) und (8.4).

Definieren wir noch $\mathfrak{M}_r(\mathfrak{L})$ als die Menge aller r-zeiligen quadratischen Matrizen mit Elementen aus $\mathfrak{L}$, wobei $\mathfrak{L}$ eine Algebra mit Involution[1] sei, so ist die Abbildung

$$(u_{ij}) \longrightarrow (\overline{u_{ji}})$$

---

[1] zu diesem Begriff vgl. (VI;§2).

eine Involution von $\mathfrak{M}_r(\mathfrak{k})$. Der Teilraum $\mathfrak{H}_r(\mathfrak{k})$ der bei der Involution festen Elemente ist mit der Multiplikation $u \circ v = \frac{1}{2}(uv + vu)$ eine Unteralgebra von $(\mathfrak{M}_r(\mathfrak{k}))^+$.

Isomorphiesatz (8.6): Es sei $\mathfrak{A}$ eine KPS-Algebra über $\mathbb{Z}_3$ oder einem Körper der Charakteristik 5, die in bezug auf ein vollständiges Orthogonalsystem von r ($r \geq 3$) Idempotenten regulär ist. Dann ist $\mathfrak{A}$ isomorph zur Algebra $\mathfrak{H}_r(\mathfrak{k})$, wobei $\mathfrak{k}$ eine alternative Algebra mit Involution über K ist.

Beweis: Der Beweis des 1.Isomorphiesatzes aus (X;§1) überträgt sich auf Grund der bereitgestellten Hilfsmittel völlig.

Lemma (8.5) zeigt, daß für $r \geq 4$ $\mathfrak{k}$ sogar assoziativ ist. Aus (VI;§4,1) folgt, daß $\mathfrak{H}_r(\mathfrak{k})$ dann eine (spezielle) Jordan-Algebra ist. Für r = 3 ist der Satz wohlbekannt, daß $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{k})$ dann und nur dann eine Jordan-Algebra ist, wenn $\mathfrak{k}$ eine alternative Algebra mit Involution ist und die bezüglich der Involution festen Elemente in $\mathfrak{N}(\mathfrak{k})$ liegen. Das ist aber gerade die Aussage von Lemma (VIII;6.2), so daß wir - mit dem Isomorphiesatz - folgendes Ergebnis erhalten:

Hauptsatz: Jede kommutative, potenz-assoziative, schwach nichtausgeartete Algebra über einem Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik, die in bezug auf ein vollständiges Orthogonalsystem von wenigstens drei Idempotenten regulär ist, ist eine Jordan-Algebra.

§9. Einfache Algebren.

Es ist nicht möglich, die Voraussetzung der Regularität mit dem Hilfsmittel der Mutationen wie in (VIII;§4) abzuschwächen, da eine Mutation einer potenz-assoziativen Algebra nicht wieder potenz-assoziativ zu sein braucht. Um für einfache KPS-Algebren auch Sätze zu erhalten, gehen wir zurück zu Lemma (6.6) und beweisen damit den folgenden Satz, der auch allgemeiner gilt (vgl. [1]):

Satz (9.1): Es sei $\mathfrak{A}$ eine einfache KPS-Algebra über $\mathbb{Z}_3$ oder einem Körper der Charakteristik 5. $c \neq e$ sei ein Idempotent in $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A}_1(c)$ eine Jordan-Algebra.

Beweis: Wir betrachten den Vektorraumhomomorphismus

$$\varphi : \mathfrak{A}_1(c) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}_{1/2}(c), \mathfrak{A}_{1/2}(c))$$

$$u \longrightarrow 2L(u) \Big| \mathfrak{A}_{1/2}(c)$$

$$\varphi(uv) = 2L(uv) = 2\big[L(u)L(v) + L(v)L(u)\big] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\big[\varphi(u)\varphi(v) + \varphi(v)\varphi(u)\big]$$

nach Lemma (6.6), also ist die Einschränkung

$$\varphi' : \mathfrak{A}_1(c) \longrightarrow (\mathrm{Bi}\,\varphi)^+$$

ein surjektiver Algebrenhomomorphismus.
Sei $u_1^* \in \mathrm{Ke}\,\varphi'$, d.h. es ist $u_1^* v_{1/2} = 0$ für alle $v_{1/2} \in \mathfrak{A}_{1/2}(c)$, dann ist für jedes $u \in \mathfrak{A}$

$$(u_1^* u)v_{1/2} = \big[u_1^*(u_1 + u_{1/2} + u_0)\big]v_{1/2} = (u_1^* u_1)v_{1/2} = u_1^*(u_1 v_{1/2}) + u_1(u_1^* v_{1/2}) = 0$$

d.h. Ke φ' ist sogar Ideal in $\mathfrak{A}$; wegen der Einfachheit von

$\mathfrak{A}$ gilt also Ke $\varphi' = \mathfrak{A}$ oder Ke $\varphi' = (0)$.
Ist Ke $\varphi' = \mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}_1(c)$ Ideal in $\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}_1(c) = \mathfrak{A}$, und das bedeutet $c = e$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Also ist Ke $\varphi' = (0)$, und $\mathfrak{A}_1(c)$ ist isomorph zu $(\mathrm{Bi}\,\varphi)^+$, d.h. $\mathfrak{A}_1(c)$ ist eine spezielle Jordan-Algebra.

Korollar: Für $u \in \mathfrak{A}_1(c)$ sind $L(u^2)$ und $L(u)$ vertauschbar.

Beweis: Auf $\mathfrak{A}_1(c)$ sind diese Transformationen vertauschbar wegen der Aussage des Satzes; auf $\mathfrak{A}_0(c)$ sind sie identisch 0. Auf $\mathfrak{A}_{1/2}(c)$ gilt $u^2 v_{1/2} = 2u(uv_{1/2})$. Ersetzen wir $v_{1/2}$ durch $uv_{1/2}$, so erhalten wir $u^2(uv_{1/2}) = 2L^3(u)v_{1/2}$; multiplizieren wir dagegen mit u, so folgt $u(u^2 v_{1/2}) \quad 2L^3(u)v_{1/2}$ und damit die Behauptung.

Für den Fall $K = \mathbb{Z}_3$ erhalten wir nun sehr schnell eine Charakterisierung der einfachen Algebren mit Hilfe folgenden Lemmas:

Lemma (9.2): Ist $K = \mathbb{Z}_3$, so sind mit $L(u^2)$ und $L(u)$ bzw. $L(v^2)$ und $L(v)$ auch $L((u+v)^2)$ und $L(u+v)$ vertauschbar.

Beweis: Wegen (5.2) gilt
$(u+v)^2[(u+v)x] = (u^2-uv+v^2)(ux+vx) =$
$= u^2(ux)-(uv)(ux)+v^2(ux)+u^2(vx)-(uv)(vx)+v^2(vx) =$
$= u(u^2x)+v(u^2x)-u[(uv)x]+u(v^2x)-v[(uv)x]+v(v^2x) =$
$= (u+v)(u^2x-(uv)x+v^2x) = (u+v)[(u+v)^2x]$, q.e.d.

Satz (9.3): Ist $\mathfrak{A}$ eine einfache KPS-Algebra über $\mathbb{Z}_3$ und gibt es in $\mathfrak{A}$ wenigstens drei paarweise orthogonale Idempotente, so ist $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra.

Beweis: Nach Satz (6.5) können wir $\mathfrak{A}$ schreiben als

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{A}_{13} + \mathfrak{A}_{33} + \mathfrak{A}_{23}.$$

Dabei liegen die ersten drei Summanden in $\mathfrak{A}_1(c_1 + c_2)$, die nächsten beiden in $\mathfrak{A}_1(c_1 + c_3)$ und der letzte in $\mathfrak{A}_1(c_2 + c_3)$, und $L(u^2)$ und $L(u)$ sind für alle $u \in \mathfrak{A}$ nach dem vorigen Satz und Lemma (9.2) vertauschbar.

Im Fall Char K = 5 folgt dieses Ergebnis nicht so einfach, da Lemma (9.2) nicht gilt. Nehmen wir wieder die Existenz von wenigstens drei paarweise orthogonalen Idempotenten an, so sind $\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_{22}$, $\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{13} + \mathfrak{A}_{33}$, $\mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{A}_{33}$ jeweils Jordan-Algebren. Dafür gilt

Lemma (9.4): Ist c eines der Idempotente $c_1 + c_2$, $c_1 + c_3$, $c_2 + c_3$, so gilt für die Komponenten der Peirce-Zerlegung bezüglich c:

$$\left[(u_\lambda v_{1/2})w_{1/2}\right]_{1-\lambda} = \left[(u_\lambda w_{1/2})v_{1/2}\right]_{1-\lambda} \quad \text{für } \lambda = 0,1 \qquad (9.1)$$

$$(u_1 v_{1/2})w_0 = u_1(v_{1/2}w_0) \qquad (9.2)$$

Beweis: (1) Wir verwenden die Jordan-Identität (IV;3.4) in $\mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{ij} + \mathfrak{A}_{jj}$, indem wir $u = u_i$, $v = v_{ij}$ setzen und auf w_{ij} anwenden:

$$2u_i\left[(u_i v_{ij})w_{ij}\right] + v_{ij}(u_i^2 w_{ij}) = 2(u_i v_{ij})(u_i w_{ij}) + u_i^2(v_{ij}w_{ij})$$

Ersetzen wir hierin u_i durch $u_i + c_i$ und vergleichen die in u_i linearen Glieder, so wird daraus

$$2c_i\left[(u_i v_{ij})w_{ij}\right] + u_i(v_{ij}w_{ij}) + 2v_{ij}(u_i w_{ij}) =$$

$$= v_{ij}(u_i w_{ij}) + (u_i v_{ij})w_{ij} + 2u_i(v_{ij}w_{ij})$$

und nach Multiplikation mit c_j:

$$c_j\left[v_{ij}(u_i w_{ij})\right] = c_j\left[(u_i v_{ij})w_{ij}\right] \qquad (9.3)$$

In der behaupteten Gleichung (9.1) nehmen wir zunächst $\lambda = 1$ und $u_1 \in \mathfrak{A}_{ii}$. Im Falle $v_{\lambda/2}, w_{\lambda/2} \in \mathfrak{A}_{jk}$ verschwinden alle Produkte, im Falle $v_{\lambda/2}, w_{\lambda/2} \in \mathfrak{A}_{ik}$ folgt die Behauptung aus (9.3). Sei schließlich $v_{\lambda/2} = v_{ik}$, $w_{\lambda/2} = w_{jk}$: $(u_i v_{ik}) w_{jk} \in \mathfrak{A}_{ij}$ und $(u_i w_{jk}) v_{ik} = 0$.- Ist dagegen $u_1 \in \mathfrak{A}_{ij}$, so ist die Behauptung für $v_{\lambda/2}, w_{\lambda/2} \in \mathfrak{A}_{ik}$ und $v_{\lambda/2}, w_{\lambda/2} \in \mathfrak{A}_{jk}$ trivial. Für $v_{\lambda/2} = v_{ik}$, $w_{\lambda/2} = w_{jk}$ gilt, indem wir (5.11) auf c_j anwenden:

$$7(u_{ij}v_{ik})(w_{jk}c_j) + 7(v_{ik}w_{jk})(u_{ij}c_j) + 2u_{ij}\left[(v_{ik}w_{jk})c_j\right] +$$
$$+ 2w_{jk}\left[(u_{ij}v_{ik})c_j\right] + 2v_{ik}\left[(u_{ij}w_{jk})c_j\right] + 7(u_{ij}w_{jk})(v_{ik}c_j) -$$
$$- 3\left[(u_{ij}w_{jk})v_{ik}\right]c_j - 3\left[u_{ij}(v_{ik}w_{jk})\right]c_j - 3\left[(u_{ij}v_{ik})w_{jk}\right]c_j -$$
$$- 3u_{ij}\left[w_{jk}(v_{ik}c_j)\right] - 3w_{jk}\left[u_{ij}(v_{ik}c_j)\right] - 3u_{ij}\left[v_{ik}(w_{jk}c_j)\right] -$$
$$- 3w_{jk}\left[v_{ik}(u_{ij}c_j)\right] - 3v_{ik}\left[w_{jk}(u_{ij}c_j)\right] - 3v_{ik}\left[u_{ij}(w_{jk}c_j)\right] = 0$$

Die Gleichung vereinfacht sich zu

$$\tfrac{7}{2}(u_{ij}v_{ik})w_{jk} + \tfrac{7}{2}(v_{ik}w_{jk})u_{ij} + u_{ij}(v_{ik}w_{jk}) + w_{jk}(u_{ij}v_{ik}) -$$
$$- 3c_j\left[u_{ij}(v_{ik}w_{jk})\right] - 3c_j\left[(u_{ij}v_{ik})w_{jk}\right] - \tfrac{3}{2}u_{ij}(v_{ik}w_{jk}) -$$
$$- \tfrac{3}{2}w_{jk}(v_{ik}u_{ij}) - \tfrac{3}{2}v_{ik}(w_{jk}u_{ij}) - \tfrac{3}{2}v_{ik}(u_{ij}w_{jk}) = 0$$

und durch Multiplikation mit c_k:

$$3c_k\left[w_{jk}(u_{ij}v_{ik})\right] - 3c_k\left[v_{ik}(w_{jk}u_{ij})\right] = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Nehmen wir $\lambda = 0$, so ist $u_o \in \mathfrak{A}_{kk}$, und es gilt

$$(u_k v_{ik})w_{jk} = u_k(v_{ik}w_{jk}) + v_{ik}(u_k w_{jk}) = v_{ik}(u_k w_{jk})$$

nach Lemma (6.6), und in den verbleibenden Fällen folgt die Behauptung direkt aus (9.3).

(2) τ sei eine (nichtausgeartete) assoziative Linearform der KPS-Algebra.

$$\tau\left[\left\{(u_1 v_{\lambda/2})w_o - u_1(v_{\lambda/2}w_o)\right\}x_{\lambda/2}\right] = \tau\left[u_1\left\{v_{\lambda/2}(w_o x_{\lambda/2}) - (v_{\lambda/2}w_o)x_{\lambda/2}\right\}\right] = 0$$

nach (9.1). Da $\tau(w_{1/2}w_1) = \tau(w_{1/2}w_0) = 0$ schon im Beweis zu Satz (6.2) gezeigt wurde, ist $\tau[\{(u_1v_{1/2})w_0 - u_1(v_{1/2}w_0)\}x] = 0$ für alle $x \in \mathfrak{A}$, und daraus folgt die Behauptung.

Wir setzen nun $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{ij} + \mathfrak{A}_{jj}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_{ik} + \mathfrak{A}_{jk}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_{kk}$ und untersuchen den Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}(w;x,y,z) = \big[&L(yz)L(x) + L(zx)L(y) + L(xy)L(z) - \\ &- L(x)L(yz) - L(y)L(zx) - L(z)L(xy)\big]w\end{aligned}$$

Er ist symmetrisch in x,y,z und verschwindet in Jordan-Algebren identisch, wie wir durch Polarisieren von (IV;3.4) sofort sehen. Einem Gedanken von Albert [1] folgend, zeigen wir das Verschwinden von $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{A}$.

I) Alle vier Faktoren liegen in $\mathfrak{L}$. Dann ist $\mathfrak{f} = 0$, da $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_1(c_i + c_j)$ Jordan-Algebra ist.

II) Drei Faktoren liegen in $\mathfrak{L}$. Liegt der vierte in $\mathfrak{N}$, so sind wegen $\mathfrak{L}\mathfrak{N} = (0)$ alle Produkte 0. Es bleibt der Fall, daß der vierte Faktor in $\mathfrak{M}$ liegt. Ist das w, so folgt das Verschwinden von $\mathfrak{f}$ wie in I). Wegen der Symmetrie von $\mathfrak{f}$ brauchen wir nur zu berechnen

$$\begin{aligned}&\mathfrak{f}(w_1;x_1,y_1,z_{1/2}) = (y_1z_{1/2})(x_1w_1) + (z_{1/2}x_1)(y_1w_1) + \\ &+ (x_1y_1)(z_{1/2}w_1) - x_1\big[(y_1z_{1/2})w_1\big] - y_1\big[(z_{1/2}x_1)w_1\big] - z_{1/2}\big[(x_1y_1)w_1\big] = \\ &= w_1\big[x_1(y_1z_{1/2})\big] + w_1\big[y_1(z_{1/2}x_1)\big] - w_1\big[(x_1y_1)z_{1/2}\big] = 0\end{aligned}$$

unter zweimaliger Anwendung von Lemma (6.6).

III) Zwei Faktoren liegen in $\mathfrak{L}$. Liegen die beiden anderen in $\mathfrak{N}$, so ist trivialerweise $\mathfrak{f} = 0$; liegt einer in $\mathfrak{M}$ und einer in $\mathfrak{N}$, so können folgende Fälle eintreten:

a) $w_1 \in \mathfrak{L}$, $x_{1/2} \in \mathfrak{M}$, $y_0 \in \mathfrak{N}$, $z_1 \in \mathfrak{L}$:

Es ist $wy = zy = 0$ und damit nach Lemma (6.6) und (9.2):

$$\mathfrak{J}(w;x,y,z) = (x_{\frac{1}{2}}y_0)(z_1w_1) - y_0\left[(z_1x_{\frac{1}{2}})w_1\right] -$$

$$- z_1\left[(x_{\frac{1}{2}}y_0)w_1\right] = w_1\left[z_1(x_{\frac{1}{2}}y_0)\right] - \left[y_0(x_{\frac{1}{2}}z_1)\right]w_1 = 0$$

b) $w_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{M}$, $x_0 \in \mathfrak{N}$, $y_1 \in \mathfrak{L}$, $z_1 \in \mathfrak{L}$:

Es ist $xy = xz = 0$ und damit nach (9.2):

$$\mathfrak{J}(w;x,y,z) = (y_1z_1)(x_0w_{\frac{1}{2}}) - x_0\left[(y_1z_1)w_{\frac{1}{2}}\right] = 0$$

c) $w_0 \in \mathfrak{N}$, $x_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{M}$, $y_1 \in \mathfrak{L}$, $z_1 \in \mathfrak{L}$:

Es ist $(yz)w = wy = wz = 0$ und damit

$$\mathfrak{J}(w;x,y,z) = (y_1z_1)(x_{\frac{1}{2}}w_0) - y_1\left[(z_1x_{\frac{1}{2}})w_0\right] - z_1\left[(x_{\frac{1}{2}}y_1)w_0\right] =$$

$$= w_0\left[(y_1z_1)x_{\frac{1}{2}}\right] - w_0\left[y_1(z_1x_{\frac{1}{2}})\right] - w_0\left[z_1(y_1x_{\frac{1}{2}})\right] = 0$$

nach (9.2) und Lemma (6.6).

Schwieriger ist der Fall, daß zwei Faktoren in $\mathfrak{L}$ und zwei in $\mathfrak{M}$ liegen.

d) $w_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{M}$, $x_1 \in \mathfrak{L}$, $y_1 \in \mathfrak{L}$, $z_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{J}(w;x,y,z) = (y_1z_{\frac{1}{2}})(x_1w_{\frac{1}{2}}) + (z_{\frac{1}{2}}x_1)(y_1w_{\frac{1}{2}}) + (x_1y_1)(z_{\frac{1}{2}}w_{\frac{1}{2}}) -$$

$$- x_1\left[(y_1z_{\frac{1}{2}})w_{\frac{1}{2}}\right] - y_1\left[(z_{\frac{1}{2}}x_1)w_{\frac{1}{2}}\right] - z_{\frac{1}{2}}\left[(x_1y_1)w_{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= (y_1z_{\frac{1}{2}})(x_1w_{\frac{1}{2}}) + (z_{\frac{1}{2}}x_1)(y_1w_{\frac{1}{2}}) + \left(z_{\frac{1}{2}}\left[(x_1y_1)w_{\frac{1}{2}}\right]\right)_1 +$$

$$+ \left(w_{\frac{1}{2}}\left[(x_1y_1)z_{\frac{1}{2}}\right]\right)_1 - \left[(x_1w_{\frac{1}{2}})(y_1z_{\frac{1}{2}})\right]_1 - \left(w_{\frac{1}{2}}\left[x_1(y_1z_{\frac{1}{2}})\right]\right)_1 -$$

$$- \left[(y_1w_{\frac{1}{2}})(x_1z_{\frac{1}{2}})\right]_1 - \left(w_{\frac{1}{2}}\left[y_1(x_1z_{\frac{1}{2}})\right]\right)_1 - z_{\frac{1}{2}}\left[(x_1y_1)w_{\frac{1}{2}}\right]$$

unter Verwendung von (V.6'). Daraus erhalten wir zunächst $\left[\mathfrak{J}(w;x,y,z)\right]_1 = 0$. Andererseits ist nach (9.1) und Lemma (6.6)

$$\left[\mathfrak{J}(w;x,y,z)\right]_0 =$$

$$= \left[(y_1z_{\frac{1}{2}})(x_1w_{\frac{1}{2}})\right]_0 + \left[(z_{\frac{1}{2}}x_1)(y_1w_{\frac{1}{2}})\right]_0 - \left(z_{\frac{1}{2}}\left[(x_1y_1)w_{\frac{1}{2}}\right]\right)_0 =$$

$$= \left\{z_{\frac{1}{2}}\left[y_1(x_1w_{\frac{1}{2}})\right] + z_{\frac{1}{2}}\left[x_1(y_1w_{\frac{1}{2}})\right] - z_{\frac{1}{2}}\left[(x_1y_1)w_{\frac{1}{2}}\right]\right\}_0 = 0.$$

e) $w_1 \in \mathfrak{L}$, $x_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{M}$, $y_1 \in \mathfrak{L}$, $z_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{J}(w;x,y,z) = (y_1z_{\frac{1}{2}})(x_{\frac{1}{2}}w_1) + (z_{\frac{1}{2}}x_{\frac{1}{2}})(y_1w_1) + (x_{\frac{1}{2}}y_1)(z_{\frac{1}{2}}w_1) -$$

$$- x_{\frac{1}{2}}\left[(y_1 z_{\frac{1}{2}})w_1\right] - y_1\left[(z_{\frac{1}{2}}x_{\frac{1}{2}})w_1\right] - z_{\frac{1}{2}}\left[(x_{\frac{1}{2}}y_1)w_1\right] =$$

$$= \mathfrak{J}(z_{\frac{1}{2}}; y_1, x_{\frac{1}{2}}, w_1) + y_1\left[(x_{\frac{1}{2}}w_1)z_{\frac{1}{2}}\right] + x_{\frac{1}{2}}\left[(w_1 y_1)z_{\frac{1}{2}}\right] +$$

$$+ w_1\left[(y_1 x_{\frac{1}{2}})z_{\frac{1}{2}}\right] - x_{\frac{1}{2}}\left[(y_1 z_{\frac{1}{2}})w_1\right] - y_1\left[(z_{\frac{1}{2}}x_{\frac{1}{2}})w_1\right] - z_{\frac{1}{2}}\left[(x_{\frac{1}{2}}y_1)w_1\right] =$$

$$= x_{\frac{1}{2}}\left[(y_1 w_1)z_{\frac{1}{2}} - w_1(y_1 z_{\frac{1}{2}})\right] + y_1\left[(x_{\frac{1}{2}}w_1)z_{\frac{1}{2}} - w_1(x_{\frac{1}{2}}z_{\frac{1}{2}})\right] +$$

$$+ w_1\left[(y_1 x_{\frac{1}{2}})z_{\frac{1}{2}}\right] - z_{\frac{1}{2}}\left[(x_{\frac{1}{2}}y_1)w_1\right] = x_{\frac{1}{2}}\left[y_1(w_1 z_{\frac{1}{2}})\right] -$$

$$- y_1\left[x_{\frac{1}{2}}(z_{\frac{1}{2}}w_1)\right] + w_1\left[(y_1 x_{\frac{1}{2}})z_{\frac{1}{2}}\right] - z_{\frac{1}{2}}\left[(x_{\frac{1}{2}}y_1)w_1\right]$$

nach Fall (d), Lemma (6.6) und (V.6').- Nun gilt mit den Abkürzungen $A := y_1\left[x_{\frac{1}{2}}(z_{\frac{1}{2}}w_1)\right]$; $B := z_{\frac{1}{2}}\left[(x_{\frac{1}{2}}y_1)w_1\right]$; $C := x_{\frac{1}{2}}\left[y_1(w_1 z_{\frac{1}{2}})\right]$; $D := w_1\left[z_{\frac{1}{2}}(y_1 x_{\frac{1}{2}})\right]$; $E := \left[(y_1 x_{\frac{1}{2}})(z_{\frac{1}{2}}w_1)\right]$

nach (V.6'): $A = E_1 + (x_{\frac{1}{2}}\left[y_1(z_{\frac{1}{2}}w_1)\right])_1$;

nach (9.1): $B_0 = \left[(x_{\frac{1}{2}}y_1)(z_{\frac{1}{2}}w_1)\right]_0$; $C_0 = \left[(x_{\frac{1}{2}}y_1)(w_1 z_{\frac{1}{2}})\right]_0$;

nach (V.6'): $D = \left[(w_1 z_{\frac{1}{2}})(y_1 x_{\frac{1}{2}})\right]_1 + (z_{\frac{1}{2}}\left[w_1(y_1 x_{\frac{1}{2}})\right])_1$,

d.h. $A = E_1 + C_1$, $B_0 = E_0 = C_0$, $D = E_1 + B_1$ und damit $\mathfrak{J}(w;x,y,z) = C - A + D - B = C - C_1 - E_1 + E_1 + B_1 - B_0 - B_1 = 0$.

IV) Höchstens ein Faktor liegt in $\mathfrak{L}$. Dann liegen wenigstens drei Faktoren in $\mathfrak{M} + \mathfrak{N} = \mathfrak{A}_{ik} + \mathfrak{A}_{jk} + \mathfrak{A}_{kk}$, also wenigstens zwei in $\mathfrak{L}' = \mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{ik} + \mathfrak{A}_{kk}$ oder wenigstens zwei in $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{A}_{jj} + \mathfrak{A}_{jk} + \mathfrak{A}_{kk}$, und damit ist $\mathfrak{J} = 0$ in allen Fällen gezeigt.

Setzen wir $x = y = z$, so folgt unmittelbar der

Satz (9.5): Ist $\mathfrak{A}$ eine einfache KPS-Algebra über einem Körper der Charakteristik 5 und gibt es in $\mathfrak{A}$ wenigstens drei paarweise orthogonale Idempotente, so ist $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra.

II. Der Fall Charakteristik 2.

§10. Zwei Strukturssätze.

Für den Fall einer Körpercharakteristik 2 beschränken wir uns für die Charakterisierung der KPS-Algebren auf den Fall $K \neq \mathbb{Z}_2$. Dann können wir in $(u+\varrho v)^2(u+\varrho v)^2 = (u+\varrho v)^4$ vergleichen:

$(u+\varrho v)^2 = u^2+\varrho^2 v^2$

$(u+\varrho v)^2(u+\varrho v)^2 = u^2u^2+\varrho^4 v^2v^2$

$(u+\varrho v)^3 = u^3+\varrho^2 v^2u+\varrho u^2v+\varrho^3 v^3$

$(u+\varrho v)^4 = u^4+\varrho^2(v^2u)u+\varrho(u^2v)u+\varrho^3uv^3+\varrho u^3v+\varrho^3(uv^2)v+$
$+\varrho^2(u^2v)v+\varrho^4v^4;$

also:

$$\left[u(u^2v)+u^3v\right] + \varrho\left[u(uv^2)+(u^2v)v\right] + \varrho^2\left[(uv^2)v+uv^3\right] = 0$$

für $\varrho \neq 0$. Da es wenigstens drei derartige ϱ gibt, folgt $u(u^2v) + u^3v = 0$ und $w(u^2v) + (u^2w)v = 0$ durch Polarisieren. Als lineare Transformation in w bedeutet das $L(u^2v) + L(v)L(u^2) = 0$ bzw. $L(u^2v) + L(u^2)L(v) = 0$ nach Übergang zum Adjungierten. Insgesamt haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz (10.1): Jede KPS-Algebra über einem Körper der Charakteristik 2 mit wenigstens drei Elementen ist eine Jordan-Algebra.

Es lassen sich nun Beispiele für einfache, aber nicht halbeinfache Jordan-Algebren (über Körpern der Charakteristik 2) angeben. So ist z.B. die Algebra mit der Basis $\{e,u,v\}$, wobei e das Einselement sei, und den Multiplika-

tionsregeln $u^2 = v^2 = 0$, $uv = vu = v + e$ trivialerweise kommutativ und potenz-assoziativ. Für jede assoziative Linearform λ gilt:

$$0 = \lambda(u^2 v) = \lambda(u(uv)) = \lambda(u(v + e)) = \lambda(v + e + u)$$

Ist λ semi-normal, so ist $\lambda(u) = \lambda(v) = 0$, also auch $\lambda(e) = 0$, d.h. $\lambda = 0$ ist die einzige semi-normale Linearform; die Algebra stimmt mit ihrem Radikal überein und ist nicht halbeinfach. Eine zweite Bedingung für die Assoziativität von λ lautet

$$0 = \lambda(v^2 u) = \lambda(v(vu)) = \lambda(v(v + e)) = \lambda(v)$$

Wir sehen daraus, daß $\lambda(e) = \lambda(u) = 1$, $\lambda(v) = 0$ eine assoziative Linearform ist.- Sei nun $(0) \neq \mathfrak{r} \subset \mathfrak{A}$ ein Ideal und $\alpha e + \beta u + \gamma v \in \mathfrak{r}$, so sind auch

$$u(\alpha e + \beta u + \gamma v) = \alpha u + \gamma v + \gamma e, \quad (\alpha + \gamma)e + (\alpha + \beta)u,$$

$$u\left[(\alpha + \gamma)e + (\alpha + \beta)u\right] = (\alpha + \gamma)u$$

Elemente des Ideals $\mathfrak{r}$. $u \in \mathfrak{r}$ würde $uv = v + e \in \mathfrak{r}$ und damit $v(v + e) = v \in \mathfrak{r}$ und $e \in \mathfrak{r}$ nach sich ziehen; ist $\mathfrak{r}$ echtes Ideal, so ist $\alpha = \gamma$ und $\alpha(u + v + e)$ ein Element von $\mathfrak{r}$. Durch Multiplikation mit v sehen wir, daß dann $\alpha e \in \mathfrak{r}$ gelten muß, für echte Ideale also $\alpha = \gamma = 0$ ist. $\beta u \in \mathfrak{r}$ mit $\beta \neq 0$ zieht aber ebenfalls $\mathfrak{r} = \mathfrak{A}$ nach sich; d.h. $\mathfrak{A}$ ist einfach, nach Satz (I;6.2) also auch schwach nichtausgeartet.

Wir entwickeln nun eine Strukturtheorie der halbeinfachen Jordan-Algebren über einem vollkommenen Körper der Charakteristik 2. Zunächst zeigen wir:

Lemma (11.2): Für jedes Idempotent $c \neq e$ von $\mathfrak{A}$ gilt:

(1) $e + c = e - c$ ist Idempotent von $\mathfrak{A}$

(2) $c\mathfrak{A}$ ist Ideal in $\mathfrak{A}$

(3) $\mathfrak{A} = c\mathfrak{A} \oplus (e + c)\mathfrak{A}$

Zum Beweis bemerken wir nur, daß unter unseren Voraussetzungen c und e + c sogar Idempotente des Zentrums von $\mathfrak{A}$ sind. Dann ist aber die Behauptung klar (vgl. etwa (I;§8,3)).

Lemma (11.3): Ist c ein Idempotent von $\mathfrak{A}$ und $c\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, so ist c das Einselement von $\mathfrak{A}$.

Beweis: Aus $c\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ folgt nach dem vorigen Lemma $(e + c)\mathfrak{A} = (0)$, also insbesondere $(e + c)e = 0 = e + c$ und damit die Behauptung.

Satz (11.4): Jede primäre halbeinfache potenz-assoziative Algebra über einem Körper der Charakteristik 2 ist einfach.

Beweis: Sei $\lambda/\mathfrak{A}$ eine semi-normale Linearform mit $Bk_\lambda(\mathfrak{A}) = (0)$. Für jedes Ideal $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{A}$ ist dann $Bk_\lambda(\mathfrak{N}) = (0)$ nach Satz (I;7.1). Enthält $\mathfrak{N}$ nur nilpotente Elemente, so ist $\mathfrak{N} = Bk_\lambda(\mathfrak{N}) = (0)$; nichttriviale Ideale $\mathfrak{N}$ enthalten also stets ein nicht-nilpotentes Element u. In $K[u]$ gibt es dann -nach dem Korollar zu Lemma (I;3.2)- ein Idempotent; da $\mathfrak{A}$ primär ist, ist dieses Idempotent gleich e. Mit $e \in \mathfrak{N}$ muß aber $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}$ sein. Also gibt es keine nichttrivialen Ideale.

Nun können wir einen Strukturssatz für halbeinfache Jordan-Algebren beweisen:

Satz (10.5): Jede halbeinfache Jordan-Algebra über einem Körper der Charakteristik 2 läßt sich als direkte Summe von einfachen halbeinfachen Algebren schreiben.

Beweis: Ist $\mathfrak{A}$ primär, so folgt die Behauptung aus Satz (10.4). Anderenfalls gibt es in $\mathfrak{A}$ ein Idempotent $c \neq e$, und wir zerlegen $\mathfrak{A} = c\mathfrak{A} \oplus (e + c)\mathfrak{A}$. Dann sind $c\mathfrak{A}$ und $(e + c)\mathfrak{A}$ echte Ideale, haben also kleinere Dimension als $\mathfrak{A}$. Diese Algebren sind wieder halbeinfach, da die Einschränkung einer auf $\mathfrak{A}$ nichtausgearteten Linearform auf $c\mathfrak{A}$ wieder nichtausgeartet ist. Die Iteration dieser Zerlegung liefert schließlich primäre halbeinfache und damit auch einfache halbeinfache Summanden.

§11. Zentral-einfache Jordan-Algebren.

Da man nach dem Korollar zu Satz (I;5.6) jede einfache Algebra mit Einselement als zentral-einfache Algebra über ihrem Zentrum auffassen kann, interessieren wir uns insbesondere für die Struktur der zentral-einfachen halbeinfachen Algebren. Wir geben zunächst einen bestimmten Typ solcher Algebren an und zeigen dann, daß unter gewissen weiteren Voraussetzungen alle genannten Algebren von diesem Typ sind.

Dazu sei $\mathfrak{H}$ eine kommutative Algebra mit $u^2 = 0$ für alle $u \in \mathfrak{H}$, $\mu | \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ eine eigentliche symmetrische nichtausgeartete Bilinearform mit $\mu(u,u) = 0$ und $\mu(uv,w) = \mu(u,vw)$ für alle $u,v,w \in \mathfrak{H}$. Letztere Eigenschaft heißt auch die Assoziativität von μ. Der Kürze halber nennen wir solche Algebren auch (B)-ALGEBREN. Im Vektorraum $Ke \oplus \mathfrak{H}$, $e \notin \mathfrak{H}$ definieren wir eine Multiplikation vermöge der Festsetzung

$$(\alpha e + u)(\alpha' e + u') = \left[\alpha\alpha' + \mu(u,u')\right]e + \alpha u' + \alpha' u + uu' \quad (11.1)$$

Dann gilt: $Ke + \mathfrak{H}$, ausgestattet mit der Multiplikation (11.1), ist eine zentral-einfache halbeinfache Jordan-Algebra.

Um das zu beweisen, überlegen wir uns, daß wegen (11.1) e das Einselement von $\mathfrak{A} = Ke + \mathfrak{H}$ ist, und daß

$$L((\alpha e + u)^2) = L(\alpha^2 e) = \alpha^2 Id$$

gilt. Da $\mathfrak{A}$ kommutativ ist, folgt daraus, daß $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra ist.- Wir definieren nun eine Linearform λ durch $\lambda(\alpha e + u) := \alpha$. Es ist $\lambda \neq 0$.

$$\lambda\left(\left[(\alpha e + u)(\alpha' e + u')\right](\alpha'' e + u'')\right) =$$

$= \lambda\big[(\ [\alpha\alpha' + \mu(u,u')]e + \alpha u' + \alpha' u + uu')(\alpha'' e + u'')\big] =$

$= \lambda\big(\big[\ \alpha\alpha'\alpha'' + \alpha''\mu(u,u') + \alpha\,\mu(u',u'') + \alpha'\,\mu(u,u'') +$

$+\ \mu(uu',u'')\big]e + \alpha\alpha''u' + \alpha'\alpha''u + \alpha''uu' + \alpha\alpha' u'' +$

$+\ \mu(u,u')u'' + \alpha u'u'' + \alpha' uu'' + (uu')u'') =$

$= \alpha\alpha'\alpha'' + \alpha''\mu(u,u') + \alpha\,\mu(u',u'') + \alpha'\,\mu(u,u'') + \mu(uu'',u')$

Dieser Ausdruck ist in ungestrichenen und zweigestrichenen Größen symmetrisch, also ist λ assoziativ.

Mit $\alpha e + u$ nilpotent ist auch $(\alpha e + u)^2 = \alpha^2 e$ nilpotent, daraus folgt $\alpha = 0$ und $\lambda(\alpha e + u) = 0$, d.h. λ verschwindet auf allen nilpotenten Elementen, auch jeder Grundkörpererweiterung, ist also seni-normal.

$\mathrm{Bk}_\lambda\, \mathfrak{A} = \{\alpha e + u \in \mathfrak{A}:\ \lambda((\alpha e + u)(\alpha' e + u')) = 0$ für alle $\alpha' e + u' \in \mathfrak{A}\} =$

$= \{\alpha e + u \in \mathfrak{A}:\ \alpha\alpha' + \mu(u,u') = 0$ für alle $\alpha' e + u' \in \mathfrak{A}\}$

Mit Hilfe der Einsetzungen $u' = 0$, $\alpha' = 1$ und $\alpha' = 0$ sehen wir, daß - da μ nichtausgeartet ist - $\mathrm{Bk}_\lambda\, \mathfrak{A} = (0)$ und $\mathfrak{A}$ halbeinfach ist. Da alle Quadrate Vielfache von e sind, ist $\mathfrak{A}$ auch primär und damit nach Satz (10.4) einfach halbeinfach.

Sei nun $\alpha'' e + u'' \in \mathfrak{z}(\mathfrak{A})$. Dann gilt nach obiger Rechnung

$\alpha\alpha''u' + \alpha'\alpha''u + \alpha''uu' + \alpha\alpha' u'' + \mu(u,u')u'' + \alpha u'u'' +$

$+\ \alpha' uu'' + (uu')u'' = \alpha\alpha' u'' + \alpha'\alpha''u + \alpha' uu'' + \alpha\alpha''u' +$

$+\ \mu(u,u'')u' + \alpha u'u'' + \alpha'' uu' + (uu'')u'$

für alle α, u, α', u' bzw.

$\mu(u,u')u'' + (uu')u'' = \mu(u,u'')u' + (uu'')u'$

für alle u,u'. $u = u''$ ergibt $\mu(u'',u')u'' + (u''u')u'' = 0$ für alle u'. Erneute Anwendung von μ gibt

$\mu[\mu(u'',u')u'' + (u''u')u'',u'] = \mu^2(u'',u') + \mu((u''u')u'',u') =$

$= \mu^2(u'',u') = 0$

für alle u' und damit u'' = 0, da μ nichtausgeartet ist. Damit haben wir auch die Zentralität von $\mathfrak{A}$ nachgewiesen.

Satz (11.1): Jede zentral-einfache halbeinfache Jordan-Algebra über einem vollkommenem Körper der Charakteristik 2 hat die Struktur Ke + $\mathfrak{H}$, wobei $\mathfrak{H}$ eine (B)-Algebra und die Multiplikation gemäß (11.1) definiert ist.

Beweis: Nach Definition der Jordan-Algebra ist $u^2 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{A})$ für alle $u \in \mathfrak{A}$, d.h. $u^2 \in$ Ke wegen der Zentralität.- Sei nun $\{e,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1}\}$ eine Basis von $\mathfrak{A}$, so ist $b_i^2 = \beta_i e$; $\sqrt{\beta_i} \in K$ wegen der Vollkommenheit. Mit der Definition $c_i := \sqrt{\beta_i}e + b_i$ ist $c_i^2 = \beta_i e + \beta_i e = 0$. Trivialerweise ist auch $\{e,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1}\}$ eine Basis von $\mathfrak{A}$. In der linearen Hülle der c_i definieren wir eine Multiplikation "$\circ$" und eine Bilinearform μ durch $uu' =: \mu(u,u')e + u \circ u'$. Die Multiplikation in $\mathfrak{A}$ läßt sich dann durch (11.1) beschreiben.

Wir müssen noch die Eigenschaften der Algebra $(\mathfrak{H},\circ)$ nachweisen. Trivialerweise ist $u \circ v = v \circ u$, $\mathfrak{H}$ also kommutativ, und $u \circ u = 0$ nach Konstruktion der c_i. Weiter ist μ symmetrisch und $\mu(u,u) = 0$ aus denselben Gründen. Da $\mathfrak{A}$ halbeinfach ist, muß es auf $\mathfrak{A}$ eine nicht verschwindende seminormale Linearform λ geben; bis auf konstante Faktoren muß $\lambda(\alpha e + u) = \alpha$ sein. Damit λ assoziativ wird, muß nach der für diese Linearform oben durchgeführten Rechnung

$\alpha\alpha'\alpha'' + \alpha''\mu(u,u') + \alpha\mu(u',u'') + \alpha'\mu(u,u'') + \mu(u \circ u',u'') =$

$= \alpha\alpha'\alpha'' + \alpha\mu(u',u'') + \alpha''\mu(u,u') + \alpha'\mu(u,u'') + \mu(u,u'\circ u'')$

sein, also $\mu(u\circ u',u'') = \mu(u,u'\circ u'')$.- Wäre μ ausgeartet, so gäbe es ein $0 \neq u \in \mathfrak{V}$ mit $\mu(u,u') = 0$ für alle $u' \in \mathfrak{V}$, und es wäre $\lambda(u(\alpha'e + u')) = 0$ für alle $\alpha'e + u' \in \mathfrak{A}$, was der Halbeinfachheit von $\mathfrak{A}$ widerspricht. Damit ist alles gezeigt.

Damit reduziert sich unser Strukturproblem auf die Bestimmung aller (B)-Algebren. Zunächst zeigen wir einen Dimensionssatz:

Satz (11.2): Es sei V ein Vektorraum über einem Körper der Charakteristik 2, $\mu|_{V\times V}$ eine symmetrische Bilinearform mit der Eigenschaft $\mu(u,u) = 0$ für alle $u \in V$. Dann gilt:

(1) Ist $\dim_K V$ ungerade, so ist μ ausgeartet.

(2) Jedes nichtausgeartete μ hat bezüglich einer geeigneten Basis eine zugeordnete Matrix

$$\begin{pmatrix} D & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D \end{pmatrix} \qquad \text{mit } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Beweis folgt sofort aus dem entsprechenden Satz bei [3].

Korollar: Jede zentral-einfache halbeinfache Jordan-Algebra über einem vollkommenen Körper der Charakteristik 2 hat ungerade Dimension.

Wir können nun die Struktur dieser Jordan-Algebren explizit angeben mit Hilfe von dreistufigen Tensoren, die unabhängig gewählt werden können. Damit ist das Problem zwar allgemein gelöst, jedoch in einer für die Praxis recht unbefriedigenden Art, insbesondere da wir keine Isomorphie-

sätze für solche Algebren angeben. In einem nächsten Paragraphen werden wir daher die Theorie der in Ke + $\mathfrak{H}$ auftretenden (B)-Algebren etwas weiter treiben.

Definition: Eine multilineare Funktion

$$\Gamma : V\times V\times V\times\ldots\times V\times V^*\times V^*\times\ldots\times V^* \longrightarrow K$$

heißt streng-alternierend, wenn Γ in allen Argumenten antisymmetrisch ist und bei Übereinstimmen zweier Argumente verschwindet.

Hauptsatz: Die zentral-einfachen halbeinfachen Jordan-Algebren über vollkommenem Grundkörper der Charakteristik 2 sind genau die Algebren folgender Art:
Es sei V ein Vektorraum über K, V^* der duale Raum; $\dim_K V \geq 0$. In Ke + V + V^* wird folgende Multiplikation eingeführt:

$$(\alpha e + u + v^*)(\alpha' e + u' + v'^*) = \left[\alpha\alpha' + v'^*(u) + v^*(u')\right]e + \left[\alpha u' + \alpha' u + \Gamma(u,u',.) + T(v'^*,.,u) + T(v^*,.,u') + \Sigma(v^*,v'^*,.)\right] + \left[\alpha v'^* + \alpha' v^* + \Delta(u,u',.) + \Gamma(u,.,v'^*) + \Gamma(u',.,v^*) + T(v^*,v'^*,.)\right],$$

wobei

$$\Gamma : V\times V\times V^* \longrightarrow K \qquad \Delta : V\times V\times V \longrightarrow K$$
$$\Sigma : V^*\times V^*\times V^* \longrightarrow K \qquad T : V^*\times V^*\times V \longrightarrow K$$

streng-alternierende multilineare Funktionen sind, die frei vorgegeben werden können.

Zum Beweis müssen wir nur zeigen, daß V + V^* mit der im Satz erklärten Multiplikation der allgemeine Typ einer (B)-Algebra ist. Es ist

$$(u+v^*)\circ(u'+v'^*) = \Gamma(u,u',.) + T(v'^*,.,u) + T(v^*,.,u') +$$

$$+ \Sigma(v^*,v'^*,.) + \Delta(u,u',.) + \Gamma(u,.,v'^*) +$$
$$+ \Gamma(u',.,v^*) + \Upsilon(v^*,v'^*,.)$$

und

$$\mu(u + v^*,u' + v'^*) = v'^*(u) + v^*(u').$$

(1) Wir zeigen, daß $V + V^*$ tatsächlich eine (B)-Algebra ist. Die Kommutativität und die Eigenschaft $(u + v^*)^2 = 0$ folgen, da die Tensoren streng-alternierend sind.

Zu $0 \neq u \in V$ gibt es ein $\hat{u} \in V^*$, so daß $\hat{u}(u) \neq 0$ gilt; dann ist auch $\mu(u + v^*,0 + \hat{u}) = \hat{u}(u) \neq 0$.

Analog gibt es zu jedem $0 \neq v^* \in V^*$ ein $\hat{v^*} \in V$, so daß $v^*(\hat{v^*}) \neq 0$ und auch $\mu(0 + v^*,\hat{v^*} + 0) = v^*(\hat{v^*}) \neq 0$ gilt; d.h. μ ist nichtausgeartet; trivialerweise folgen $\mu(u+v^*,u+v^*) = 0$ und die Symmetrie von μ. Schließlich zeigt eine leichte Rechnung, daß

$$\mu((u + v^*)\circ(u' + v'^*),u'' + v''^*) =$$
$$= v''^*\left[\Gamma(u,u',.) + \Upsilon(v'^*,.,u) + \Upsilon(v^*,.,u') + \Sigma(v^*,v'^*,.)\right] +$$
$$+ \left[\Delta(u,u',.) + \Gamma(u,.,v'^*) + \Gamma(u',.,v^*) + \Upsilon(v^*,v'^*,.)\right](u'') =$$
$$= \Gamma(u,u',v''^*) + \Upsilon(v'^*,v''^*,u) + \Upsilon(v^*,v''^*,u') +$$
$$+ \Sigma(v^*,v'^*,v''^*) + \Delta(u,u',u'') + \Gamma(u,u'',v'^*) +$$
$$+ \Gamma(u',u'',v^*) + \Upsilon(v^*,v'^*,u'')$$

in ungestrichenen und zweigestrichenen Größen symmetrisch ist; es folgt die Assoziativität von μ und damit, daß $V + V^*$ (B)-Algebra ist.

(2) Wir überlegen uns schließlich, daß jede (B)-Algebra mit Hilfe von Tensoren in der angegebenen Weise geschrieben werden kann. Nach Satz (11.2) hat der zugrundeliegende Vektorraum gerade Dimension, er ist also isomorph zu einem Raum $V + V^*$, und wir können μ in die Gestalt

$\mu(u_i,u_j) = 0;\ \mu(v_i,v_j) = 0;\ \mu(u_i,v_j) = \delta_{ij}$

bringen, wobei $\{u_1,\ldots,u_n\}$ eine Basis von V, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ eine Basis von V^* ist. Die Multiplikation der Basiselemente kann man folgendermaßen schreiben:

$$u_iu_j = \sum_k(\gamma_{ij}^k u_k + \delta_{ij}^k v_k);\quad v_iv_j = \sum_k(\sigma_{ij}^k u_k + \tau_{ij}^k v_k),$$

wobei die γ_{ij}^k, δ_{ij}^k, σ_{ij}^k, τ_{ij}^k wegen der Kommutativität in den unteren Indizes symmetrisch sind.

Aus $u_i^2 = \sum_k(\gamma_{ii}^k u_k + \delta_{ii}^k v_k)$ und $v_i^2 = \sum_k(\sigma_{ii}^k u_k + \tau_{ii}^k v_k)$ folgt

$$\gamma_{ii}^k = \delta_{ii}^k = \sigma_{ii}^k = \tau_{ii}^k = 0$$

Die Assoziativität von μ ergibt die Beziehungen

$$\delta_{ij}^k = \mu(u_iu_j,u_k) = \mu(u_i,u_jk_k) = \delta_{jk}^i =: \delta_{ijk}$$

$$\sigma_{ij}^k = \mu(v_iv_j,v_k) = \mu(v_i,v_jv_k) = \sigma_{jk}^i =: \sigma_{ijk}$$

Beide Tensoren sind also total symmetrisch. Schließlich können wir mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$\mu(u_i,u_jv_k) = \mu(u_iu_j,v_k) = \gamma_{ij}^k;\ \mu(v_i,u_jv_k) = \mu(u_j,v_iv_k) = \tau_{ik}^j$$

das Produkt

$$u_jv_k = \sum_i(\tau_{ik}^j u_i + \gamma_{ij}^k v_i)$$

berechnen.- Zwei beliebige Elemente von $V + V^*$ multiplizieren sich dann wie folgt:

$$\sum_r(\alpha_r u_r + \beta_r v_r)\cdot\sum_s(\alpha_s' u_s + \beta_s' v_s) =$$

$$= \sum_{r,s,k}(\alpha_r\alpha_s'\gamma_{rs}^k u_k + \alpha_r\alpha_s'\delta_{rsk}v_k + \beta_r\beta_s'\sigma_{rsk}u_k + \beta_r\beta_s'\tau_{rs}^k v_k +$$

$$+ \alpha_r\beta_s'\tau_{ks}^r u_r + \alpha_r\beta_s'\gamma_{kr}^s v_k + \alpha_s'\beta_r\tau_{kr}^s u_k + \alpha_s'\beta_r\gamma_{ks}^r v_k) =$$

$$= \sum_k\Big[\sum_{r,s}(\alpha_r\alpha_s'\gamma_{rs}^k + \beta_r\beta_s'\sigma_{rsk} + \alpha_r\beta_s'\tau_{ks}^r + \alpha_s'\beta_r\tau_{kr}^s)\Big]u_k +$$

$$+ \sum_k\Big[\sum_{r,s}(\alpha_r\alpha_s'\delta_{rsk} + \beta_r\beta_s'\tau_{rs}^k + \alpha_r\beta_s'\gamma_{kr}^s + \alpha_s'\beta_r\gamma_{ks}^r)\Big]v_k$$

Wir setzen nun

$$\Gamma: V \times V \times V^* \longrightarrow K \qquad \Delta: V \times V \times V \longrightarrow K$$
$$(u_r, u_s, v_t) \longrightarrow \gamma^t_{rs} \qquad (u_r, u_s, u_t) \longrightarrow \delta_{rst}$$
$$\Sigma: V^* \times V^* \times V^* \longrightarrow K \qquad \Upsilon: V^* \times V^* \times V \longrightarrow K$$
$$(v_r, v_s, v_t) \longrightarrow \sigma_{rst} \qquad (v_r, v_s, u_t) \longrightarrow \tau^t_{rs}$$

als multilineare Funktionen an. Aufgrund der oben bewiesenen Gleichungen sind $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Upsilon$ dann auch streng-alternierend.

$$(\sum_r \alpha_r u_r + \sum_r \beta_r v_r)(\sum_s \alpha'_s u_s + \sum_s \beta'_s v_s) =$$
$$= \sum_k \Big[\Gamma(\sum_r \alpha_r u_r, \sum_s \alpha'_s u_s, v_k) + \Sigma(\sum_r \beta_r v_r, \sum_s \beta'_s v_s, v_k) +$$
$$+ \Upsilon(v_k, \sum_s \beta'_s v_s, \sum_r \alpha_r u_r) + \Upsilon(v_k, \sum_r \beta_r v_r, \sum_s \alpha'_s u_s)\Big] u_k +$$
$$+ \sum_k \Big[\Delta(\sum_r \alpha_r u_r, \sum_s \alpha'_s u_s, u_k) + \Upsilon(\sum_r \beta_r v_r, \sum_s \beta'_s v_s, u_k) +$$
$$+ \Gamma(u_k, \sum_r \alpha_r u_r, \sum_s \beta'_s v_s) + \Gamma(u_k, \sum_s \alpha'_s u_s, \sum_r \beta_r v_r)\Big] v_k$$

Mit den Abkürzungen $u = \sum_r \alpha_r u_r$, $u' = \sum_s \alpha'_s u_s$, $v^* = \sum_r \beta_r v_r$, $v'^* = \sum_s \beta'_s v_s$ und unter Benutzung der Eigenschaft "streng-alternierend" ergibt sich das gewünschte Ergebnis, wenn wir als Basis in V^* gerade die zu $\{u_1, \ldots, u_n\}$ duale Basis gewählt haben:

$$\mu(u + v^*, u' + v'^*) = \mu(v^*, u') + \mu(v'^*, u) = v^*(u') + v'^*(u)$$

Abschließend wollen wir die Algebren $[X; \mu, e]$ (VI;§5) näher untersuchen und sie in unsere Ergebnisse einbauen. Bekanntlich ist $[X; \mu, e]$ eine Jordan-Algebra mit Einselement e über dem Vektorraum X vermöge der Multiplikation

$$uv = \lambda(u)v + \lambda(v)u + \mu(u,v)e$$

wobei μ eine eigentliche symmetrische Bilinearform von X mit $\mu(e,e) = 1$ ist und $\lambda(u) := \mu(u,e)$. Es gilt:

(1) Für einfaches $[X; \mu, e]$ ist μ nichtausgeartet.

Das entnehmen wir Formel (5.6) aus (VI;5,3).

(2) Für jede semi-normale Linearform λ' gilt:

$$\lambda'(u) = \sqrt{\mu(u,u)}\,\lambda'(e).$$

Denn $(u + \sqrt{\mu(u,u)}e)^2 = u^2 + \mu(u,u)e = 0$, also

$\lambda'(u + \sqrt{\mu(u,u)}e) = 0$.

Somit gibt es bis auf konstante Faktoren höchstens eine von 0 verschiedene semi-normale Linearform, nämlich $\lambda'(u) = \sqrt{\mu(u,u)}$.

(3) Für $\dim_K X \geq 3$ ist $\lambda(u) = \sqrt{\mu(u,u)}$, falls $\mathfrak{A} \neq \operatorname{Rad}\mathfrak{A}$ einfach ist.

Denn im Falle $\mathfrak{A} \neq \operatorname{Rad}\mathfrak{A}$ muß nach (2) $\sqrt{\mu(u,u)}$ eine assoziative Linearform sein. Dann ist aber

$$\sqrt{\mu(uv,uv)} = \left[\mu(\lambda(u)v + \lambda(v)u + \mu(u,v)e,\ \lambda(u)v + \right.$$
$$\left. + \lambda(v)u + \mu(u,v)e)\right]^{1/2} = \left[\lambda^2(u)\mu(v,v) + \lambda^2(v)\mu(u,u) + \right.$$
$$\left. + \mu^2(u,v)\right]^{1/2} = \lambda(u)\sqrt{\mu(v,v)} + \lambda(v)\sqrt{\mu(u,u)} + \mu(u,v)$$

und

$$\sqrt{\mu((uv)w,(uv)w)} = \lambda(uv)\sqrt{\mu(w,w)} + \lambda(w)\sqrt{\mu(uv,uv)} +$$
$$+ \mu(uv,w) = \mu(u,v)\sqrt{\mu(w,w)} + \lambda(u)\lambda(w)\sqrt{\mu(v,v)} +$$
$$+ \lambda(v)\lambda(w)\sqrt{\mu(u,u)} + \lambda(w)\mu(u,v) + \lambda((uv)w)$$

Damit $\sqrt{\mu(u,u)}$ assoziativ ist, muß dieser Ausdruck in u,v,w symmetrisch sein. Das ergibt:

$$\mu(u,v)\sqrt{\mu(w,w)} + \mu(v,w)\sqrt{\mu(u,u)} + \lambda(v)\lambda(w)\sqrt{\mu(u,u)} +$$
$$+ \lambda(u)\lambda(v)\sqrt{\mu(w,w)} + \lambda(w)\mu(u,v) + \lambda(u)\mu(v,w) = 0$$

Nehmen wir nun an, es gebe ein $w \neq 0$ mit $\lambda(w) = \mu(w,w) = 0$.

Eingesetzt folgt daraus $\mu(v,w)\sqrt{\mu(u,u)} + \lambda(u)\mu(v,w) = 0$.

Wegen der Nichtausgeartetheit von μ - vgl.(1) - gibt es dann ein v mit $\mu(v,w) \neq 0$, und es muß $\lambda(u) = \sqrt{\mu(u,u)}$ für alle $u \in \mathfrak{A}$ sein.. In diesem Fall haben wir die Behauptung also schon gezeigt. Anderenfalls ist für jedes nilpotente $w \neq 0$ wegen $\mu(w,w) = 0$ - Lemma (VI;5.3) - dann $\lambda(w) \neq 0$. Gäbe es nun linear unabhängige nilpotente w_1, w_2 mit $\lambda(w_i) =: \lambda_i \neq 0$, so wäre $\lambda_1 w_2 + \lambda_2 w_1 \neq 0$ nilpotent, aber

$$\lambda(\lambda_1 w_2 + \lambda_2 w_1) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

im Widerspruch zu der eben gemachten Bemerkung. Also ist der Untervektorraum der nilpotenten Elemente eindimensional. Da für jedes v: $[v + \sqrt{\mu(v,v)}e]^2 = 0$ gilt, ist $v + \sqrt{\mu(v,v)}e = \gamma u$, $u \neq 0$ nilpotent. Jedes v schreibt sich als $v = \sqrt{\mu(v,v)}e + \gamma u$, und es ist $\dim_K X \leqslant 2$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daraus erhalten wir den

Satz (11.3): Die zentral-einfachen halbeinfachen Jordan-Algebren $[X; \mu, e]$ haben in der im Hauptsatz angegebenen Form die zugeordneten Tensoren $\Gamma = \Delta = \Sigma = T = 0$.

Beweis: Wir müssen nur zeigen, daß zwei Elemente, auf denen die semi-normale Linearform verschwindet, als Produkt ein Vielfaches von e haben. Im Falle $\dim_K X \geqslant 3$ ist das klar: aus $\lambda(u) = \lambda(v) = 0$ folgt $uv = \mu(u,v)e$. Wegen des Korollars zu Satz (11.2) tritt der Fall $\dim_K X = 2$ nicht ein, und im eindimensionalen Falle ist die Behauptung trivial.

§12. (B)-Algebren.

Nun wollen wir die angekündigte Untersuchung der (B)-Algebren durchführen. Im folgenden sei also stets:

$\mathfrak{b}$ eine kommutative Algebra über einem Körper K der Charakteristik 2 mit $u^2 = 0$ für alle $u \in \mathfrak{b}$; und

$\mu: \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \longrightarrow K$ eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform mit $\mu(u,u) = 0$ und $\mu(uv,w) = \mu(u,vw)$ für alle $u,v,w \in \mathfrak{b}$.

Zur Untersuchung dieser Algebren müssen wir die übliche Radikaldefinition etwas abändern. Wir beweisen zunächst:

Satz (12.1): Jede (B)-Algebra $\mathfrak{b}$ läßt sich in eine (bis auf die Reihenfolge eindeutige) direkte Summe

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{b}_1 \oplus \mathfrak{b}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{b}_r \qquad (r \geq 0)$$

zerlegen, wobei die $\mathfrak{b}_s$ einfach sind und für jedes minimale Ideal $\mathfrak{w}$ von $\mathfrak{R}$ gilt: $\mathfrak{w}^2 = (0)$.

Beweis: (1) Es sei $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$ ein minimales Ideal, d.h. es gibt kein Ideal $(0) \neq \mathfrak{b}' \subsetneq \mathfrak{b}$ in $\mathfrak{b}$, und es sei $\mathfrak{b}^2 \neq (0)$. Unter $\mathfrak{b}^\perp$ verstehen wir die Menge

$$\mathfrak{b}^\perp = \{x \in \mathfrak{b} : \mu(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{b}\}.$$

Trivialerweise ist $\mathfrak{b}^\perp$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{b}$, und wegen $\mu(xy,z) = \mu(x,yz) = 0$ für $x \in \mathfrak{b}^\perp$, $y \in \mathfrak{b}$, $z \in \mathfrak{b}$ ist $\mathfrak{b}^\perp$ ein Ideal in $\mathfrak{b}$.

Auch $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\perp$ ist Ideal, also $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\perp = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\perp = (0)$. Der erstere Fall kann nicht eintreten, da dann für alle $x,y \in \mathfrak{b}$, $z \in \mathfrak{b}$ gilt $\mu(xy,z) = \mu(x,yz) = 0$, d.h. $xy = 0$ oder $\mathfrak{b}^2 = (0)$ im Widerspruch zur Voraussetzung über $\mathfrak{b}$.

Also ist $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^{\perp} = (0)$.

(2) Es sei $\mu(b,x) = 0$ für ein $b \in \mathfrak{b}$ und alle $x \in \mathfrak{b}$, dann ist $b \in \mathfrak{b}^{\perp}$, also sogar $b \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^{\perp} = (0)$. Wir sehen daraus, daß $\mu | \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ nichtausgeartet ist.
Es sei nun $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_r, v_r\}$ eine gemäß Satz (11.2) ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{b}$ mit $\mu(u_i, u_j) = \mu(v_i, v_j) = 0$; $\mu(u_i, v_j) = \delta_{ij}$. Jedes $x \in \mathfrak{b}$ schreibt sich als

$$x = \sum_{i=1}^{r} \mu(x,u_i)v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu(x,v_i)u_i + \Big[x + \sum_{i=1}^{r} \mu(x,u_i)v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu(x,v_i)u_i\Big],$$

wobei die ersten beiden Summanden in $\mathfrak{b}$ liegen. Da dann

$$\mu\Big(x + \sum_{i=1}^{r} \mu(x,u_i)v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu(x,v_i)u_i, u_j\Big) =$$
$$= \mu(x,u_j) + \sum_{i=1}^{r} \mu(x,u_i)\,\delta_{ij} = 0$$

gilt, liegt der dritte Summand in $\mathfrak{b}^{\perp}$, und $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}^{\perp}$ ist eine direkte Zerlegung als Summe von Vektorräumen. Für $x \in \mathfrak{b}$, $y \in \mathfrak{b}^{\perp}$ gilt $xy \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^{\perp} = (0)$, die Zerlegung ist also auch als Summe von Algebren direkt: $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^{\perp}$.

(3) Es sei $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{b}$ ein Ideal in $\mathfrak{b}$. Für $c \in \mathfrak{r}$, $x \in \mathfrak{b}$ gilt dann $cx = cb + c(x+b) = cb$, wenn $x = b + (x+b)$ die Zerlegung von x ist. Nun liegt $cx = cb$ in $\mathfrak{r}$, d.h. $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{b}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{b}$ und nach Voraussetzung über $\mathfrak{b}$ gleich $\mathfrak{b}$, d.h. $\mathfrak{b}$ ist einfach.

(4) Es sei $\mu(x_0, y) = 0$ für ein $x_0 \in \mathfrak{b}^{\perp}$ und alle $y \in \mathfrak{b}^{\perp}$. Dann ist $\mu(x_0, z) = 0$ für alle $z \in \mathfrak{b}$ (da $z = b + y$ mit $b \in \mathfrak{b}$) und deshalb $x_0 = 0$, d.h. $\mu | \mathfrak{b}^{\perp} \times \mathfrak{b}^{\perp}$ ist nichtausgeartet, und $\mathfrak{b}^{\perp}$ ist, ausgestattet mit μ, wieder eine (B)-Algebra.

Wir iterieren das Verfahren so lange als möglich und erhalten schließlich eine direkte Zerlegung

$\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}_r \qquad (r \geq 0)$

wobei die $\mathfrak{L}_\varrho$ einfach sind. $\mathfrak{R}$ hat zusätzlich die Eigenschaft, daß für jedes minimale Ideal $(0) \neq \mathfrak{w} \subset \mathfrak{R}$ dann $\mathfrak{w}^2 = (0)$ gilt.

(5) Um die Eindeutigkeit der Zerlegung zu zeigen, nehmen wir zwei Zerlegungen

$\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}_r = \mathfrak{R}' \oplus \mathfrak{L}'_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}'_s$

an und bilden

$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1 \cap (\mathfrak{R}' \oplus \mathfrak{L}'_1 \oplus \mathfrak{L}'_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}'_s) =$

$= \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{R}' \oplus \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}'_1 \oplus \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}'_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}'_s$

Wegen der Einfachheit von $\mathfrak{L}_1$ gibt es ein τ, $1 \leq \tau \leq s$ mit $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}'_\tau$, oder es ist $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{R}'$. Im letzteren Falle wäre aber $\mathfrak{L}_1$ ein Ideal von $\mathfrak{R}'$, enthielte also ein von 0 verschiedenes Nullideal im Widerspruch zur Einfachheit. Also ist (wegen der Einfachheit von $\mathfrak{L}'_\tau$) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}'_\tau$. Da die Zerlegung von $\mathfrak{L}$ direkt ist, liefert die Iteration des Verfahrens die behauptete Eindeutigkeit.

Den bei dieser Zerlegung auftretenden "Rest" $\mathfrak{R}$ nennen wir das Radikal Rad $\mathfrak{L}$. Eine (B)-Algebra, deren Radikal (0) ist, heißt halbeinfach. Dann lesen wir aus dem Beweis von Satz (12.1) sofort ab:

Satz (12.2): Für (B)-Algebren gilt:

(1) Rad $\mathfrak{L}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{L}$.

(2) Rad Rad $\mathfrak{L}$ = Rad $\mathfrak{L}$.

(3) $\mathfrak{L}$ ist genau dann halbeinfach, wenn es kein Ideal $\mathfrak{b} \neq (0)$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{b}^2 = (0)$ gibt.

Um den Zusammenhang des Radikals mit den auflösbaren Idealen festzustellen, beweisen wir ein Lemma und untersuchen dann die einfachsten (B)-Algebren, nämlich die niedrigster Dimension.

Lemma (12.3): Jedes auflösbare Ideal liegt im Radikal.

Beweis: $(0) \neq \mathfrak{b} \subset \mathfrak{L}$ sei ein auflösbares Ideal; $\mathfrak{L} = \operatorname{Rad}\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}_r$ die in Satz (12.1) angegebene Zerlegung von $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \operatorname{Rad}\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{L}_r$ zeigt, daß $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \operatorname{Rad}\mathfrak{L}$, da $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{L}_s$ stets gleich $\mathfrak{L}_s$ oder (0) ist und ein auflösbares Ideal kein einfaches Ideal als direkten Summanden haben kann.

Aus Satz (11.2) wissen wir, daß alle (B)-Algebren gerade Dimension haben. Ist diese Dimension gleich 2, so sei $\{u_1, v_1\}$ eine Basis der Algebra. Wegen $\mu(u_1, u_1v_1) = 0$ und $\mu(v_1, u_1v_1) = 0$ ist $u_1v_1 = 0$:

Jede zweidimensionale (B)-Algebra ist die Nullalgebra.

Betrachten wir als nächstes eine (B)-Algebra $\mathfrak{L}$ mit $\dim \mathfrak{L} = 4$ und einer ausgezeichneten Basis $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$. Sei weiter $w = u_1v_1 + u_2v_2$. Die folgende Rechnung zeigt, daß $w = 0$ ist:

(1) Aus $\mu(u_1v_1, u_1) = \mu(u_1v_1, v_1) = 0$ erhalten wir eine Darstellung $u_1v_1 = \alpha u_2 + \beta v_2$.- Außerdem setzen wir (das ist möglich wegen $\mu(u_1u_2, u_1) = \mu(u_1u_2, u_2) = 0$) $u_1u_2 = \gamma u_1 + \delta u_2$.

(2) $\mu(u_1, u_1w) = 0$

$$\mu(v_1, u_1w) = \mu(v_1, u_1(u_1v_1)) + \mu(v_1, u_1(u_2v_2)) =$$
$$= \mu(u_1v_1, u_2v_2) = \mu(\alpha u_2 + \beta v_2, u_2v_2) = 0$$
$$\mu(u_2, u_1w) = \mu(u_2, u_1(u_1v_1)) + \mu(u_2, u_1(u_2v_2)) =$$
$$= \mu(u_1(u_1u_2), v_1) + \mu((u_1u_2)u_2, v_2) = \delta\gamma + \gamma\delta = 0$$

$$\mu(v_2,u_1w) = \mu(v_2,u_1(u_1v_1)) + \mu(v_2,u_1(u_2v_2)) =$$
$$= \mu(\alpha u_2 + \beta v_2, u_1v_2) + \mu(u_1v_2,u_2v_2) =$$
$$= \alpha\,\mu(u_2,u_1v_2) + \mu(u_1v_2,u_2v_2)$$

Nun ist wegen $\mu(u_2v_2,u_2) = \mu(u_2v_2,v_2) = 0$ das Produkt u_2v_2 eine Linearkombination von u_1 und v_1. Wegen $\mu(u_2v_2,u_1) =$ $= \mu(u_1u_2,v_2) = \delta$ ist der Koeffizient von v_1 gleich δ, und wir sehen, daß auch $\mu(v_2,u_1w) = 0$ ist. Da μ nichtausgeartet ist, folgt aus alledem, daß $u_1w = 0$ gilt, aus Symmetriegründen dann auch $wx = 0$ für alle $x \in \mathfrak{L}$.

(3) Im Falle $w = 0$ gilt nach Definition von w $u_1v_1 = u_2v_2$, also

$$\mu(u_1u_2,u_1) = \mu(u_1u_2,u_2) = 0$$
$$\mu(u_1u_2,v_1) = \mu(u_1v_1,u_2) = \mu(u_2v_2,u_2) = 0$$
$$\mu(u_1u_2,v_2) = \mu(u_1,u_2v_2) = \mu(u_1,u_1v_1) = 0$$

und damit $u_1u_2 = 0$.

$$\mu(u_1v_1,u_1) = \mu(u_1v_1,v_1) = 0;\ \mu(u_1v_1,u_2) = \mu(u_2v_2,u_2) = 0$$
$$\mu(u_1v_1,v_2) = \mu(u_2v_2,v_2) = 0$$

und damit $u_1v_1 = 0$.

$$\mu(u_1v_2,u_1) = \mu(u_1v_2,v_2) = 0$$
$$\mu(u_1v_2,u_2) = \mu(u_1,u_2v_2) = \mu(u_1,u_1v_1) = 0$$
$$\mu(u_1v_2,v_1) = \mu(u_1v_1,v_2) = \mu(u_2v_2,v_2) = 0$$

und damit $u_1v_2 = 0$.- In jedem Fall gibt es also ein $w \in \mathfrak{L}$, $w \neq 0$ mit $wx = 0$ für alle $x \in \mathfrak{L}$. Kw ist dann ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{L}$, liegt also im Radikal. Die Dimension von $\mathfrak{L}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{L}$ kann somit höchstens 2 sein, und $\mathfrak{L}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{L}$ ist die Nullalgebra:

Jede vierdimensionale (B)-Algebra stimmt mit ihrem Radikal

überein.

Es gilt nun der Satz:

Satz (12.4): (1) Jede auflösbare (B)-Algebra stimmt mit ihrem Radikal überein.

(2) Es gibt nicht-auflösbare (B)-Algebren, die mit ihrem Radikal übereinstimmen.

Beweis: (1) folgt unmittelbar aus Lemma (12.3).
(2) Wir geben ein Beispiel an. $\{u_1,v_1,u_2,v_2,u_3,v_3\}$ sei die nach Satz (11.2) ausgezeichnete Basis. Die Multiplikation geschehe nach den Regeln

$$u_iu_j = 0; \quad v_iv_j = (u_{6-i-j} + v_{6-i-j})(1 - \delta_{ij})$$

$$u_iv_j = u_{6-i-j}(1 - \delta_{ij})$$

Um zu zeigen, daß es sich wirklich um eine (B)-Algebra handelt, ist lediglich die Assoziativität von μ nachzuweisen; das geschieht durch elementare Rechnung. Unsere Algebra ist außerdem nicht auflösbar, da

$$u_1 = u_2v_3; \quad u_1 + v_1 = v_2v_3$$

und entsprechendes für die anderen Indizes gilt, die Elemente $u_1,u_2,u_3,u_1 + v_1,u_2 + v_2,u_3 + v_3$ in $\mathfrak{b}^2$ liegen, also $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathfrak{b} = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{b}$ ist. Da $\dim \mathfrak{b} = 6$, genügt der Nachweis, daß $\mathfrak{b}$ nicht einfach ist, denn jedenfalls hat eine sechsdimensionale Algebra keine echten einfachen Ideale, die (B)-Algebren sind, wie aus unseren obigen Überlegungen folgt. Die lineare Hülle von u_1,u_2,u_3 ist ein Ideal in $\mathfrak{b}$, also ist $\mathfrak{b}$ nicht einfach, q.e.d.

Dieser Satz zeigt, daß es relativ viele Algebren gibt, die mit ihrem Radikal übereinstimmen. Um sicherzustellen, daß das nicht stets so ist, beweisen wir

Satz (12.5): Es gibt einfache (B)-Algebren.

Beweis: Wir geben ein sechsdimensionales Beispiel an. Basis und Bilinearform seien wie im Beispiel von Satz (12.4) definiert; für die Multiplikation setzen wir folgende Regeln fest:

$$u_i u_j = u_{6-i-j}(1 - \delta_{ij}); \quad v_i v_j = v_{6-i-j}(1 - \delta_{ij})$$

$$u_i v_j = (u_{6-i-j} + v_{6-i-j})(1 - \delta_{ij})$$

Die leicht nachzurechnende Assoziativität von μ zeigt wieder, daß es sich um eine (B)-Algebra handelt. Nun sei $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{B}$ ein Ideal.

(1) Ist ein u_i oder ein v_i Element von $\mathfrak{b}$, so gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{B}$.

denn: o.E.d.A. sei $u_1 \in \mathfrak{b}$. Dann liegen auch $u_1 u_2 = u_3$ und $u_1 v_2 = u_3 + v_3$ in $\mathfrak{b}$; ebenso $u_1 u_3 = u_2$ und $u_1 v_3 = u_2 + v_2$. Das zeigt, daß $v_2, v_3 \in \mathfrak{b}$ und $v_2 v_3 = v_1 \in \mathfrak{b}$.

(2) Ist $0 \neq \lambda_1(u_1+v_1) + \lambda_2(u_2+v_2) + \lambda_3(u_3+v_3) \in \mathfrak{b}$, so gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{B}$.

denn: o.E.d.A. sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann liegt

$$\{[\lambda_1(u_1+v_1) + \lambda_2(u_2+v_2) + \lambda_3(u_3+v_3)](u_3+v_3)\}(u_1+v_1) =$$

$$= \{\lambda_1(u_2+u_2+v_2+u_2+v_2+v_2) + \lambda_2(u_1+u_1+v_1+u_1+v_1+v_1)\}(u_1+v_1) =$$

$$= [\lambda_1(u_2+v_2) + \lambda_2(u_1+v_1)](u_1+v_1) = \lambda_1(u_3+v_3)$$

in $\mathfrak{b}$, also auch $u_3 + v_3$ und $(u_3 + v_3)v_1 = u_2 + v_2 + v_2 = u_2$. Die Behauptung folgt nun nach (1).

(3) Ist $0 \neq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 \in \mathfrak{b}$, so gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{B}$ ist einfach.

denn: o.E.d.A. sei $\alpha_1 \neq 0$. Dann liegt

$$(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\beta_3 v_3)(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3) =$$
$$= (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(u_3+v_3) + (\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)(u_2+v_2) +$$
$$+ (\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)(u_1+v_1)$$

in $\mathfrak{b}$. Im Falle

$$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1, \alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1, \alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2) \neq (0,0,0)$$

ist nach (2) alles gezeigt. Sonst gilt:

$$\beta_2 = \alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1; \quad \beta_3 = \alpha_3\alpha_1^{-1}\beta_1;$$
$$(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\beta_1 v_1+\alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1 v_2+\alpha_3\alpha_1^{-1}\beta_1 v_3)u_2 =$$
$$= \alpha_1 u_3+\alpha_3 u_1+\beta_1 u_3+\beta_1 v_3+\alpha_3\alpha_1^{-1}\beta_1 u_1+\alpha_3\alpha_1^{-1}\beta_1 v_1 =$$
$$= \alpha_3(1+\beta_1\alpha_1^{-1})u_1+(\alpha_1+\beta_1)u_3+\alpha_3\alpha_1^{-1}\beta_1 v_1+\beta_1 v_3 \in \mathfrak{b}$$

ebenso

$$[\alpha_3(1+\beta_1\alpha_1^{-1})u_1+(\alpha_1+\beta_1)u_3+\alpha_3\alpha_1^{-1}\beta_1 v_1+\beta_1 v_3]v_1 =$$
$$= (\alpha_1+\beta_1)(u_2+v_2)+\beta_1 v_2 = \alpha_1(u_2+v_2)+\beta_1 u_2 \in \mathfrak{b} \qquad (12.1)$$

Schließlich ist auch

$$\{[(\alpha_1(u_2+v_2)+\beta_1 u_2)u_1]u_2\}u_3 = \{[\alpha_1(u_3+u_3+v_3)+\beta_1 u_3]u_2\}u_3 =$$
$$= [\alpha_1(u_1+v_1)+\beta_1 u_1]u_3 = \alpha_1(u_2+u_2+v_2)+\beta_1 u_2 =$$
$$= \alpha_1 v_2+\beta_1 u_2 \in \mathfrak{b}$$

Zusammen mit (12.1) ergibt das $\alpha_1 u_2 \in \mathfrak{b}$, woraus nach Annahme über α_1 und (1) die Behauptung folgt.

Offen bleibt die Frage nach einer vollständigen Beschreibung der (B)-Algebren auf einem anderen Wege, als ihn der Hauptsatz des §11 angibt. Insbesondere wäre eine Charakterisierung der einfachen (B)-Algebren erwünscht, die vielleicht einen weiteren Einblick in die Theorie der Jordan-Algebren über Körpern der Charakteristik 2 möglich macht.

Literaturverzeichnis.

1 : Albert, A.A.: A theory of power-associative commutative algebras, Trans.Amer.Math.Soc. 69 (1950), 503ff.

2 : Albert, A.A.: On commutative power-associative algebras of degree two, Trans.Amer.Math.Soc. 74 (1953), 323ff.

3 : Arf, C.: Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2 (Teil I.), Journ.f.d. reine u.angew.Math. 183 (1941), 148ff.

4 : Braun, H. und Koecher, M.: Jordan-Algebren. Springer-Verlag 1966.

5 : Kokoris, l.A.: New results on power-associative algebras, Trans.Amer.Math.Soc. 77 (1954), 363ff.

6 : Kokoris, L.A.: Simple power-associative algebras of degree two, Ann.Math. 64 (1956), 544ff.

7 : Osborn, J.M.: Identities of non-associative algebras, Can.Journ.Math. 17 (1965), 78ff.

8 : Bourbaki, N.: Algèbre, Chap. 3. Hermann 1958.

9 : Jacobson, N.: Jordan algebras. Erscheint demnächst.

Lebenslauf

Ich wurde am 25. September 1940 als Sohn des wissenschaftlichen Assistenten Dr. Hans Richter und seiner Ehefrau Elfriede, geborene Wende, in Leipzig geboren.

Ab Herbst 1946 bis Herbst 1949 war ich Volksschüler in Haltingen (Baden). Dann besuchte ich das Hans-Thoma-Gymnasium in Lörrach und ab Herbst 1955 die Luitpold-Oberrealschule in München. Dort erlangte ich im Juli 1958 die Hochschulreife.

Seit dem Wintersemester 1958/59 studierte ich Mathematik und Physik an den Universitäten München, Heidelberg und Münster; im Juni 1963 legte ich in München die Hauptprüfung für Diplom-Mathematiker und im Herbst 1964 das Staatsexamen für das Höhere Lehramt ab.

Vom 1. November 1964 bis zum 30. November 1966 war ich Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität München. Seitdem bin ich Studienreferendar am Luitpold-Gymnasium in München.